

1 Calcul intégral

1.1 Compétences Attendues

- Estimer graphiquement ou encadrer une intégrale, une valeur moyenne.
- Calculer une intégrale à l'aide d'une primitive, à l'aide d'une intégration par parties.
- Majorer (minorer) une intégrale à partir d'une majoration (minoration) d'une fonction par une autre fonction.
- Calculer l'aire entre deux courbes.
- Étudier une suite d'intégrales, vérifiant éventuellement une relation de récurrence.
- Interpréter une intégrale, une valeur moyenne dans un contexte issu d'une autre discipline.

1.2 Exercices

Exercice 1:

Calculer les intégrales suivantes :

- | | |
|---|--|
| 1. $\int_{-5}^7 \sqrt{2} dx$ | 8. $\int_1^9 \frac{3}{2\sqrt{x}} dx$ |
| 2. $\int_3^{14} \frac{1}{x} dx$ | 9. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos(2x) - 3\sin(5x)) dx$ |
| 3. $\int_{-2}^4 (x^2 + 3x + 4) dx$ | 10. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ |
| 4. $\int_0^{10} e^{-5x} dx$ | 11. $\int_3^7 \frac{dx}{x^2}$ |
| 5. $\int_{-1}^1 (x^4 - x^2 + x - 1) dx$ | 12. $\int_1^2 \frac{x+1}{x^2} dx$ |
| 6. $\int_{-2}^2 (8x^5 + 5x^3 + 2x) dx$ | |
| 7. $\int_0^1 e^{2x} dx$ | |

Exercice 2:

Calculer les intégrales suivantes :

- | | | |
|---------------------------------------|---|--|
| 1. $\int_{-3}^3 (x^5 + 2x^3 - 2x) dx$ | 3. $\int_0^{\sqrt{\pi}} x \cos(x^2) dx$ | 5. $\int_0^4 \frac{2x}{1+x^2} dx$ |
| 2. $\int_{-2}^4 2xe^{x^2} dx$ | 4. $\int_{-3}^3 \cos(x) dx$ | 6. $\int_{-1}^4 \frac{x}{\sqrt{9+x^2}} dx$ |

Exercice 3:

Pour tout réel $x > -1$, on pose $f(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$.

1. Montrer que pour tout $x > -1$, $f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}$.
2. En déduire une primitive de f sur $] -1; +\infty[$.
3. Calculer alors $\int_1^3 f(x) dx$.

Exercice 4:

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $\begin{cases} x^2 + x & \text{si } x < -1 \\ 2x^3 - x + 1 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$. Calculer $\int_{-4}^1 f(t) dt$.

Exercice 5:

Soit $I = \int_0^1 \frac{x}{x+1} dx$.

1. Expliquer pourquoi $f : x \mapsto \frac{x}{x+1}$ ne correspond à aucune forme de dérivée connue.
2. Déterminer deux réels α, β tels que pour tout $x \neq -1$, $f(x) = \alpha + \frac{\beta}{x+1}$.
3. En déduire que $I = 1 - \ln(2)$.

Exercice 6:

En remarquant que pour tout réel t , $t^3 = t^3 + t - t$, calculer $\int_0^1 \frac{t^3}{t^2+1} dt$.

Exercice 7:

Calculer l'intégrale $\int_1^2 \frac{3u^2 + 2u - 1}{u} du$.

Exercice 8:

Calculer $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx + \int_0^1 \frac{1}{1+e^x} dx$.

Exercice 9:

Calculer astucieusement les intégrales suivantes :

$$1. I = \int_1^2 e^x dx + \int_0^1 \left(x - \frac{1}{e^{-x}} \right) dx \quad \left| \quad 2. J = \int_1^2 2xe^{x^2+x} dx + \int_1^2 e^{x^2+x} dx \right.$$

Exercice 10:

Soient f, g deux fonctions continues sur $[1; 2]$ telles que $\int_1^2 f(x) dx = 2$ et $\int_1^2 g(x) dx = -3$.

$$1. \text{ Calculer } \int_1^2 (5f(x) - g(x)) dx \quad \left| \quad 2. \text{ Calculer } \int_1^2 \left(\frac{1}{2}f(x) + \frac{2}{3}g(x) \right) dx \right.$$

Exercice 11:

A l'aide d'une intégration par partie, calculer $\int_0^\pi x \cos(x) dx$ et $\int_1^4 x \ln(x) dx$.

Exercice 12:

Calculer les intégrales suivantes

$$1. \int_1^2 4xe^{3x-1} dx \quad \left| \quad 2. \int_0^1 xe^{4+5x} dx \quad \left| \quad 3. \int_{-1}^1 (x+3)e^{-x} dx \right.$$

Exercice 13:

Calculer les intégrales suivantes

$$1. \int_{-1}^1 2x^3 e^{x^2-1} dx \quad \left| \quad 2. \int_0^1 \frac{x}{(5x+3)^2} dx \quad \left| \quad 3. \int_{-1}^0 \frac{5x}{(3x-9)^3} dx \right.$$

Exercice 14:

Calculer les intégrales suivantes

$$1. \int_{-1}^3 3x^2 e^{x^2} dx \quad \left| \quad 2. \int_0^2 4(2x+1)^3 e^{x^2+x-1} dx \right.$$

Exercice 15:

A l'aide de deux intégrations par parties, calculer $\int_0^1 x^2 e^x dx$.

Exercice 16:

Pour tout entier naturel n , on définit l'intégrale $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$.

1. Calculer la valeur exacte de I_0 .

2. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout entier n on a : $I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n$

3. En déduire les valeurs de I_1 et I_2 .

Exercice 17:

On pose $I = \int_0^\pi e^x \cos(x) dx$.

1. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I = \int_0^\pi e^x \sin(x) dx$.

2. A l'aide d'une nouvelle intégration par parties, montrer que $I = e^\pi - 1 - I$.

3. En déduire la valeur de I .

Exercice 18:

On définit la suite (I_n) , telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $I_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x} dx$.

1. Calculer $I_0 + I_1$ et I_1 . En déduire la valeur de I_0 .

2. Calculer $I_n + I_{n+1}$ en fonction de n . En déduire les valeurs de I_3 et I_4 .

3. Comparer e^{nx} et $e^{(n+1)x}$ pour $x \in [0; 1]$. En déduire, sans essayer de calculer I_n , que la suite (I_n) est croissante.

4. (a) Montrer que, pour tout $x \in [0; 1]$, $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{1+e^x} \leq \frac{1}{2}$.

(b) En déduire un encadrement de (I_n) .

(c) Quelle est la limite de la suite (I_n) ?

Exercice 19:

La suite (I_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $I_n = \int_0^1 (1+t^n) dt$.

1. Prouver que (I_n) est décroissante.

2. Est-elle convergente ?

Exercice 20:

Pour tout entier n , on pose $u_n = \int_0^n e^{-x^2} dx$. On ne cherchera pas à calculer u_n en fonction de n .

1. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

2. Démontrer que pour tout $x \geq 0$, on a : $e^{-x^2} \leq e^{-2x+1}$. En déduire que pour tout entier naturel n , on a $u_n < \frac{e}{2}$.

3. Que peut-on dire sur la convergence de la suite (u_n) ?

Exercice 21:

Pour tout entier naturel n , on pose $I_n = \int_0^\pi x^2 \cos(nx) dx$. A l'aide d'une double intégration par parties, calculer I_n en fonction de n .

Exercice 22:

Soit (I_n) la suite définie pour tout entier n par $I_n = \int_0^1 t^n e^{-t} dt$.

1. (a) Calculer I_0 et I_1 .
 (b) Exprimer I_2 en fonction de I_1 puis en déduire I_2 .
 (c) Exprimer I_3 en fonction de I_2 puis en déduire I_3 .
2. (a) Démontrer que pour tout entier n , $I_n \geq 0$.
 (b) Etudier le sens de variation de la suite I .
 (c) Démontrer que la suite (I_n) est convergente.
3. (a) A l'aide d'une intégration par parties, exprimer I_{n+1} en fonction de I_n .
 (b) Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, $I_n \leq \frac{1}{ne}$.
 (c) En déduire la limite de la suite (I_n) .

1.3 Algorithmes et Python

Exercice 23:

Soit $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ définie sur $[1; 2]$.

1. Calculer $I = \int_1^2 f(x) dx$.
2. (a) Quels sont le sens de variation et le signe de f sur $[1; 2]$?
 (b) En déduire que, pour tous $a < b \in [1; 2]$ on a :

$$\frac{b-a}{b} \leq \int_a^b f(x) dx \leq \frac{b-a}{a}$$
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on subdivise l'intervalle $[1; 2]$ en n intervalles $\left[1 + \frac{k}{n}; 1 + \frac{k+1}{n}\right]$ d'amplitude $\frac{1}{n}$.

(a) Montrer que, pour tout $0 \leq k < n$:

$$\frac{1}{(n+1) + k} \leq \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} f(x) dx \leq \frac{1}{n+k}$$

(b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(n+1) + k} \leq I \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k}$$

4. On note (u_n) et (v_n) les suites définies sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(n+1) + k} \text{ et } v_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k}$$

(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n}. \text{ En déduire que } (v_n) \text{ est décroissante et qu'elle converge vers une limite } l.$$

(b) Montrer de la même manière que (u_n) est croissante et qu'elle converge vers une limite l' .

(c) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n - u_n = \frac{1}{2n}$.

(d) En déduire que $l = l' = I$.

5. (a) Recopier et compléter la fonction en Python qui renvoie le n -ième terme de la suite (u_n) .

```
1 def un(n):
2     u = ...
3     for i in range(0, n):
4         u = u + 1 / ...
5     return ...
```

(b) Coder une fonction `vn` qui renvoie le n -ième terme de la suite (v_n) .

(c) Pour $p \in \mathbb{N}^*$, pour quelle valeur de n a-t-on $v_n - u_n = 10^{-p}$?

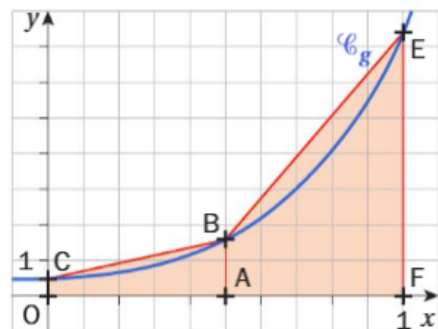
(d) Coder une fonction `rectangle` prenant en paramètre un nombre entier p et renvoyant un encadrement de I d'amplitude 10^{-p} .

(e) En déduire une valeur approchée de 10^{-4} de $\ln(2)$.

Exercice 24:

Soit $g : x \mapsto xe^{2x} + \frac{1-x}{2}$. $\mathcal{C}_g$ est sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonale. On cherche une valeur approchée de $I = \int_0^1 g(t) dt$.

1. Donner une interprétation géométrique de I .



2. On subdivise $[0; 1]$ en deux intervalles d'amplitude 0,5. En utilisant les trapèzes $OABC$ et $ABEF$ construits ci-contre, donner une valeur approchée de I .

3. On subdivise l'intervalle $[0; 1]$ en n intervalles $\left[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right]$ d'amplitude $\frac{1}{n}$ et on construit selon le même procédé des trapèzes sous la courbe C_g sur chacun des n intervalles.

Montrer que la valeur approchée de I , ainsi obtenue est

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g\left(\frac{k}{n}\right) + g\left(\frac{k+1}{n}\right)}{2}.$$

4. (a) Recopier et compléter la fonction en Python `trapeze` qui prend en argument le nombre n de trapèzes et une fonction f et qui renvoie la somme des aires des n trapèzes construits, comme dans la question précédente, à partir de la courbe représentative de f .

```
1 def trapeze(f,n):
2     aire=...
3     for k in range(n):
4         aire=aire+(f(k/n)+...)(2*n)
5     return aire
```

- (b) Utiliser ce programme pour déterminer des valeurs approchées de I en prenant pour valeurs de n : 10, 50, 100, 1000.

1.4 Approfondissements

Exercice 25:

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

- Démontrer que la suite (I_n) tend vers 0.
- Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $I_n + I_{n+1}$.

3. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1}$.

Exercice 26:

Calculer les intégrales suivantes :

$$1. I = \int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2} dt \quad \left| \quad 2. K = \int_0^1 \frac{x \ln(x)}{(x^2+1)^2} dx$$

Exercice 27:

Pour $n \geq 1$, donner une primitive de $x \mapsto \ln^n(x)$.

Exercice 28:

La suite (H_n) est définie sur $\mathbb{N}^*$ par $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et la fonction f est définie pour tout

$x \in [1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

- Etudier le sens de variation de (H_n) .
- Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{k}$$
- (a) En utilisant la relation de Chasles, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$H_{n+1} - 1 \leq \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} \leq H_n$$
 (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln(n)$$
 (c) Déterminer la limite de H_n lorsque n tend vers $+\infty$.