

Fonctions trigonométriques

1.1 Compétences Attendues

- Résoudre une équation du type $\cos(x) = a$, une inéquation de la forme $\cos(x) \leq a$ sur $[-\pi; \pi]$.
- Dans le cadre de la résolution de problème, notamment géométrique, étudier une fonction simple définie à partir de fonctions trigonométriques, pour déterminer des variations, un optimum.

1.2 Exercices

Exercice 1:

En utilisant le cercle trigonométrique, déterminer les valeurs suivantes:

1. $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$	5. $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$	9. $\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)$
2. $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$	6. $\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)$	10. $\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$
3. $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$	7. $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$	11. $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$
4. $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$	8. $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$	12. $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

Exercice 2:

Soit $x \in \mathbb{R}$, que vaut $(\cos(x) + \sin(x))^2 + (\cos(x) - \sin(x))^2$?

Exercice 3:

Exprimer les nombres suivants en fonction de $\cos(x)$ ou de $\sin(x)$.

1. $\sin(3\pi + x)$	4. $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$
2. $\cos\left(\frac{5\pi}{2} - x\right)$	5. $\sin(\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
3. $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$	6. $3\sin(\pi + x) - 2\sin(\pi - x) + 4\sin(x - \pi)$

Exercice 4:

- Etant donné que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, calculer les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
- Déterminer les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

Exercice 5:

Résoudre les équations d'inconnue $x \in]-\pi; \pi]$.

1. $\cos(x) = \frac{1}{2}$	3. $\cos(x) = 0$
2. $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	4. $\sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Exercice 6:

Résoudre l'équation $\cos^2(x) - \frac{1}{2} = 0$ sur $[0; 2\pi]$.

Exercice 7:

Résoudre les inéquations suivantes sur $[-\pi; \pi]$.

1. $\cos(x) \leq \frac{1}{2}$	3. $\cos(x) \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$
2. $\cos(x) \geq 0$	4. $\cos(2x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice 8:

Résoudre les inéquations suivantes sur $[-\pi; \pi]$.

- $2\cos(x) + 1 > 2$
- $-\frac{1}{2} \leq \cos(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $1 - \sqrt{3} \leq -2\cos(2x) + 1 \leq 0$

Exercice 9:

Résoudre dans $]-\pi; \pi]$ les équations suivantes :

1. $\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$	5. $2\cos(2x) = 1$
2. $\sin(x) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$	6. $\sin(3x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
3. $\cos(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$	7. $\cos(2x) = \cos(x)$
4. $\cos(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$	8. $\sin(3x) = \cos(x)$

Exercice 10:

A l'aide d'un cercle trigonométrique, donner l'ensemble des solutions des inéquations dans l'intervalle $] -\pi ; \pi]$:

$$1. \sin(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \left| \quad 2. \cos(x) \geq -\frac{1}{2} \quad \left| \quad 3. \cos(x) < 0 \right. \right.$$

Exercice 11:

Résoudre sur $] -\pi ; \pi]$ les équations suivantes :

$$\begin{array}{l} 1. \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \\ 2. \sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} 3. \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos(x) \\ 4. 2\cos^2(x) - 3\cos(x) + 1 \geq 0 \\ 5. 2\sin^2(x) + 5\sin(x) + 2 < 0 \end{array} \right.$$

Exercice 12:

Vérifier que la fonction f est T -périodique.

$$\begin{array}{l} 1. f : x \mapsto \sin(10\pi x), T = 0,2 \\ 2. f : x \mapsto \cos\left(4x + \frac{\pi}{3}\right), T = \frac{\pi}{2} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} 3. f : x \mapsto \sin\left(\frac{10x-1}{3}\right), T = \frac{3\pi}{5} \\ 4. f : x \mapsto \frac{2}{5}\cos(3\pi x), T = \frac{2}{3} \end{array} \right.$$

Exercice 13:

Vérifier que la fonction f est T -périodique.

$$\begin{array}{l} 1. f : x \mapsto \sin(6x - 3), T = \frac{\pi}{3} \\ 2. f : x \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, T = \pi \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} 3. f : x \mapsto \cos^2(x) - \sin^2(x), T = \pi \\ 4. f : x \mapsto (4\cos^2(x) - 3)\cos(x), T = \frac{2\pi}{3} \end{array} \right.$$

Exercice 14:

Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$, montrer que la fonction $f : x \mapsto \cos(kx)$ définie sur $\mathbb{R}$ est $\frac{2\pi}{k}$ -périodique.

Exercice 15:

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{2 + \cos(x)}$.

- Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.
- Calculer $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $f(-\pi)$.
- Trouver deux réels m et M tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $m \leq f(x) \leq M$.

Exercice 16:

On admet que les fonctions suivantes sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Donner une expression de leur dérivée.

$$\begin{array}{l} 1. f_1 : x \mapsto \cos(3x) + x \\ 2. f_2 : x \mapsto \sin(x)\cos(x) \\ 3. f_3 : x \mapsto \cos(e^x) \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} 4. f_4 : x \mapsto \sin^3(x) \\ 5. f_5 : x \mapsto \frac{\sin(x)}{2 + \cos(x)} \\ 6. f_6 : x \mapsto \ln(1 + \cos^2(x)) \end{array} \right.$$

Exercice 17:

Le but de cet exercice est de prouver que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

On pose $f : x \mapsto \cos^2(x) + \sin^2(x)$.

- Que vaut $f(0)$?
- Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout x .
- Conclure.

Exercice 18:

Soit $f : x \mapsto x + \cos(x)$ définie sur $\mathbb{R}$.

- Construire le tableau de variations de f en incluant les éventuelles limites en $\pm\infty$.
- Donner l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.

Exercice 19:

On considère la fonction $f : x \mapsto \sin(x) - \frac{x}{2}$ définie sur $\mathbb{R}$. Etudier les variations de f sur $[-\pi; \pi]$ puis tracer sa courbe dans un repère orthonormé.

Exercice 20:

- Démontrer que les fonctions $f : t \mapsto \frac{1 + \cos(2t)}{2}$ et $g : t \mapsto \cos^2(t)$ sont des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + 4y = 2$.
- Justifier qu'elles vérifient la même double condition initiale, c'est-à-dire que $f(0) = g(0)$ et $f'(0) = g'(0)$.
- De la même manière qu'il existe une unique solution à une équation différentielle d'ordre 1 avec une condition initiale, on admet qu'une équation différentielle d'ordre 2 avec une double condition initiale admet une unique solution. En déduire que les fonctions f et g sont égales sur $\mathbb{R}$.

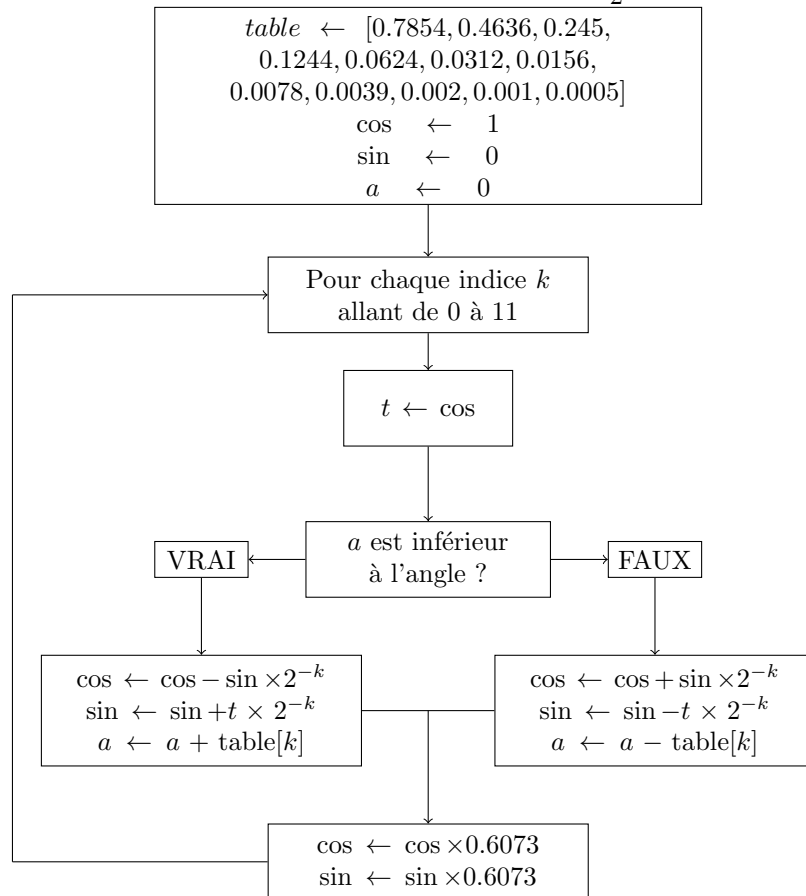
1.3 Algorithmes et Python

Exercice 21:

En 1971, John Stephen Walther a publié une généralisation de l'algorithme CORDIC, élaboré par Jack E. Volder en 1959.

Cel a permis d'implémenter certains calculs dans la calculatrice HP-35, comme ceux des fonctions trigonométriques mais également d'autres fonctions comme l'exponentielle.

L'algorithme proposé par J.S. Walther se fonde sur la connaissance d'une table élémentaire à partir de laquelle on applique l'algorithme ci-dessous qui calcule une valeur approchée à 10^{-3} du cosinus et du sinus (respectivement affectés aux variables $\cos$ et $\sin$) d'un angle, en radians, compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.



- (a) Coder en Python une fonction `trigo` renvoyant dans une liste les valeurs approchées du cosinus et du sinus d'un angle, en radians, compris entre 0

et $\frac{\pi}{2}$.

- (b) Tester cette fonction sur des angles dont les valeurs de cosinus et sinus sont connues.

- En utilisant les propriétés des fonctions cosinus et sinus, écrire une fonction `cos` (respectivement `sin`) renvoyant le cosinus (respectivement le sinus) d'un angle $x \in \mathbb{R}$ passé en paramètre.

On pourra d'abord coder une fonction `mesure_principale` qui, pour un angle donné, renvoie sa mesure principale comprise dans l'intervalle $] -\pi; \pi]$, puis procéder par disjonction de cas selon le quadrant du cercle trigonométrique dans lequel se trouve cette mesure principale.

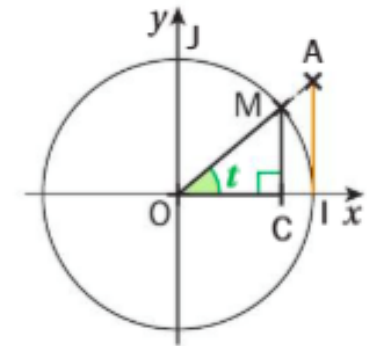
1.4 Approfondissements

Exercice 22:

On définit la fonction tangente par $\tan : t \mapsto \frac{\sin(t)}{\cos(t)}$.

- (a) Déterminer le domaine de définition de la fonction tangente.

- (b) Justifier que, pour un angle t , en radians, en notant M le point du cercle trigonométrique associé à cet angle, la tangente correspond, lorsqu'elle existe, à la distance entre $I(1;0)$ et le point A , intersection de $[OM)$ et de la tangente au cercle en I .



- (a) Démontrer que pour tout $t \in \mathcal{D}_{\tan}$: $\tan(t + \pi) = \tan(t)$.
- (b) En déduire que l'étude de la fonction tangente peut être ramenée à l'étude de ladite fonction sur $I = \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$.
- (a) Démontrer que la fonction tangente est impaire sur I .
- (b) En déduire que l'étude de la fonction tangente peut être ramenée à l'étude de ladite fonction sur $\left[0; \frac{\pi}{2} \right[$.
- (a) Justifier que la fonction $\tan$ est dérivable sur I et démontrer que pour tout $t \in I$: $\tan'(t) = \frac{1}{\cos^2(t)} = 1 + \tan^2(t)$.

(b) Calculer les limites de la fonction $\tan$ aux bornes de I .

(c) En déduire le tableau de variations de $\tan$ sur I .

5. Justifier que tout nombre réel admet un antécédent par la fonction tangente. Cela semble-t-il cohérent avec la caractérisation géométrique de $\tan$ de la question 1.(b) ?

Exercice 23:

Déterminer l'ensemble des réels x vérifiant :

$$\begin{cases} 2 \cos(x) - \sin(x) &= \sqrt{3} + \frac{1}{2} \\ \cos(x) + 2 \sin(x) &= \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \end{cases}$$

Exercice 24:

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $2 \cos^2(x) - 9 \cos(x) + 4 \geq 0$

2. $\cos(5x) + \cos(3x) \geq \cos(x)$

Exercice 25:

Soit $f : x \mapsto \ln \left(\left| \sin \left(\frac{\pi}{2} x \right) \right| \right)$. Quel est le domaine de définition de f ? La fonction f est-elle paire ? impaire ? périodique ?

Exercice 26:

Déterminer la valeur de $\arctan \left(-\frac{1}{2} \right)$, $\arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ et $\arctan(\sqrt{3})$.

Exercice 27:

Simplifier les expressions suivantes :

1. $\tan(\arcsin(x))$ | 2. $\sin(\arccos(x))$ | 3. $\cos(\arctan(x))$

Exercice 28:

Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = \cos(n \arccos(x))$ et $g_n(x) = \frac{\sin(n \arccos(x))}{\sqrt{1-x^2}}$. Prouver que f_n et g_n sont des fonctions polynomiales.