Chapitre 2 : Produit scalaire

Table des matières

Contenu

- Définition géométrique : si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont non nuls, alors $<\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}>=\|\overrightarrow{u}\|\times\|\overrightarrow{v}\|\times\cos(\theta)$ où θ est une mesure de l'angle entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$; si $\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{v}$ est nul, alors $<\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}>=0$.
- Projection orthogonale d'un vecteur sur un axe.
- Interprétation du produit scalaire en termes de projections orthogonales (du vecteur $\overrightarrow{u}$ sur l'axe dirigé par $\overrightarrow{v}$ ou du vecteur $\overrightarrow{v}$ sur l'axe dirigé par $\overrightarrow{u}$).
- Propriétés du produit scalaire : bilinéarité, symétrie.
- Expressions, dans une base orthonormée, du produit scalaire de deux vecteurs, de la norme d'un vecteur.
- Caractérisation de l'orthogonalité.
- Théorème d'Al-Kashi, égalité du parallélogramme.

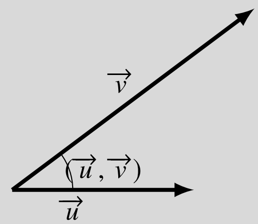
1 Définition et caractérisations

1.1 Aspect trigonométrique

Définition/Propriété:

Soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^2 \backslash \{\overrightarrow{0}\}$. On appelle produit scalaire le nombre réel $<\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}>$ (ou $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$) défini par :

- $<\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}> = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$.
- $<\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}> = 0$ si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.



Exemple:
Soit ABC un triangle équilatéral de côté 2. On a alors :
$<\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}> = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 2 \times 2 \times \cos(\frac{\pi}{3}) = 2$

Définition/Propriété:
Soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ deux vecteurs colinéaires. On a :

$$<\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}> = \begin{cases} \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| & \text{Si } \overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ sont de même sens} \\ -\|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| & \text{Si } \overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ sont de sens contraire} \end{cases}$$

Exemple:
Soient A, B, C et D quatre points alignés tels que $AB = 2$, $BC = 3$ et $CD = 1$.
On a alors : $<\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}> = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| = 2 \times 5 = 10$ et $<\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CB}> = -\|\overrightarrow{AD}\| \times \|\overrightarrow{CB}\| = -6 \times 3 = -18$

Propriété:
Soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs quelconques et un nombre réel k, on a :

- $<\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}> = <\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}>$
- $<\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}> = <\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}> + <\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}>$
- $<\overrightarrow{u}, k\overrightarrow{v}> = <k\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}> = k <\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}>$

Remarque

$\forall \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^2, <\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}> = \|\overrightarrow{u}\|^2$.

Définition:
Soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^2$.
$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont dits orthogonaux si et seulement si $<\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}> = 0$.

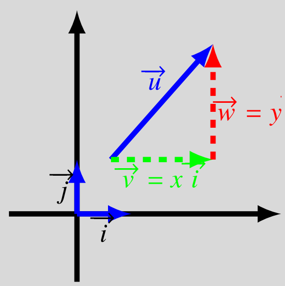
Exercice:
On considère un carré $ABCD$ de côté a et de centre O. Les points I, J, K et L sont les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$ $[CD]$ et $[DA]$. Calculer, en fonction de a, les produits scalaires suivants :

- $< \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AK} >$
- $< \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OD} >$
- $< \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC} >$
- $< \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{OI} >$
- $< \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{OJ} >$
- $< \overrightarrow{KL}, \overrightarrow{BD} >$

1.2 Aspect projectif

Définition:
Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $\overrightarrow{u} = \binom{x}{y}$ dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Le vecteur $\overrightarrow{u}$ se décompose selon les deux axes du repère en deux vecteurs $\overrightarrow{v} = x\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{w} = y\overrightarrow{j}$ de telle sorte que :

- $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$
- $\overrightarrow{v}$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{u}$ sur l'axe des abscisses.
- $\overrightarrow{w}$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{u}$ sur l'axe des ordonnées.



Exemple:
Pour $\overrightarrow{u} = \binom{1}{2}$, on a $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$ avec $\overrightarrow{v} = \binom{1}{0}$ et $\overrightarrow{w} = \binom{0}{2}$.

! Remarque

En physique, une force est un vecteur $\overrightarrow{F}$, il est donc compliqué de travailler des équations de la physique directement avec des vecteurs.
Pour cela, on écrit la loi de Newton puis on projète sur les axes (Ox) et (Oy) pour obtenir deux équations de réelles. C'est-à-dire qu'on effectue le produit scalaire $\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{j}$.

1.3 Aspect analytique

Nous avons exclusivement vu des caractérisations pour déterminer le produit scalaire de deux vecteurs de par des connaissances géométriques (longueurs, angles,...). Or nous savons qu'un vecteur possède nécessairement des coordonnées, dans le cas où nous les connaissons, il existe une dernière méthode pour déterminer ce produit scalaire.

Définition/Propriété:
Soient $x, x', y, y' \in \mathbb{R}$ et $\overrightarrow{u} = \binom{x}{y}$ et $\overrightarrow{v} = \binom{x'}{y'}$ dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On a alors $< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} >= xx' + yy'$

Exercice:
Calculer le produit scalaire des vecteurs suivants :

- $\overrightarrow{u} = \binom{2}{4}$ et $\overrightarrow{v} = \binom{-1}{-2}$
- $\overrightarrow{w} = \binom{1}{-3}$ et $\overrightarrow{z} = \binom{-3}{-9}$

2 Théorème d'Al-Kashi

Théorème:
Soit ABC un triangle quelconque. On note : $\begin{cases} a = BC \quad b = CA \quad c = AB \\ \hat{A} = \widehat{BAC} \; \hat{B} = \widehat{ABC} \; \hat{C} = \widehat{BCA} \end{cases}$

$Alors : \begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\hat{A}) \\ b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos(\hat{B}) \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\hat{C}) \end{cases}$

Exemple:

- Dans un triangle KLM, on a $KL = 5$, $KM = 2\sqrt{2}$ et $\widehat{MKL} = 45$. On calcule LM par :
  $LM^2 = KL^2 + KM^2 - 2 \times KL \times KM \times \cos(\widehat{MKL})$.
  A partir de là il est possible de déterminer la mesure de l'angle $\widehat{LMK}$.
- Dans un triangle ABC, on a $AB = 6$, $BC = 14$ et $\widehat{BAC} = 60°$. Déterminer AC.

3 Exercice bilan

1. Soit un rectangle $ABCD$ de longueur 6 et de largeur 4. Calculer
   a. $< \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC} >$
   b. $< \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{BD} >$
2. Déterminer la valeur de m tel que $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} m-8 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2m-7 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux.
3. Soit ABC un triangle tel que $AB = 6$, $AC = 4$ et $\hat{C} = 45°$. Déterminer la valeur de BC puis de $\hat{A}$ et $\hat{B}$.