

Chapitre 3 : Nombres complexes (forme algébrique)

Table des matières

Chapitre 3 : Nombres complexes (forme algébrique)	1
Axel CARPENTIER	
Contenu	2
1 Notion de nombre complexe	3
2 Opération entre nombres complexes	3
2.1 Addition, soustraction et multiplication	3
2.2 Conjugaison et opérations	4
3 Exercice bilan	5

Contenu

- définition, conjugué ;
- somme, produit, quotient ;
- conjugué d'une somme, d'un produit, d'un quotient.

1 Notion de nombre complexe

Définition:

Un nombre z est dit complexe s'il s'écrit de manière unique sous la forme $z = a + ib$ où :

- i est un nombre dit imaginaire défini par $i^2 = -1$.
- a est un nombre réel : c'est la partie réelle de z .
- b est un nombre réel : c'est la partie imaginaire de z .

L'ensemble des nombres complexes se note $\mathbb{C}$.

! Remarque

Tous les nombres réels sont des nombres complexes, en effet $z = 8$ s'écrit également $z = 8 + 0i$.
On a donc l'inclusion d'ensembles $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

! Remarque

En physique, on note j le nombre complexe i pour éviter la confusion avec la notation du courant électrique.

Exercice:

Donner la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants :

- $z_1 = -5 + 3i$
- $z_2 = 1,5 + 3,3i$
- $z_3 = \frac{3}{4}i + 5$
- $z_4 = -i$

2 Opération entre nombres complexes

2.1 Addition, soustraction et multiplication

Propriété:

Sur l'ensemble $\mathbb{C}$, les propriétés de calculs entre deux nombres sont les mêmes que sur l'ensemble $\mathbb{R}$.

Exemple:

- $(3 + 4i) + (7 + 5i) = 3 + 4i + 7 + 5i = 10 + 9i$
- $(3 + 4i) - (7 + 5i) = 3 + 4i - 7 - 5i = -4 - i$
- $(3 + 4i) \times (7 + 5i) = 3 \times 7 + 3 \times 5i + 4i \times 7 + 4i \times 5i = 21 + 15i + 28i + 20i^2 = 1 + 43i$

Exercice:

Calculer l'addition, la soustraction et la multiplication de $z_1 = \frac{1}{2} - 3i$ par $z_2 = 1 - \frac{4}{3}i$.

2.2 Conjugaison et opérations

Définition:

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe, on appelle conjugué de z , noté $\bar{z}$, le nombre complexe $\bar{z} = a - ib$.

Exercice:

Déterminer le conjugué des nombres complexes $z_1 = \frac{1}{2} - 3i$ et $z_2 = 1 - \frac{4}{3}i$.

Propriété:

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe, on a $z \times \bar{z} = a^2 + b^2$.

Méthode:

Soit z_1 et $z_2 \neq 0$ deux nombres complexes. Pour déterminer la forme algébrique de $\frac{z_1}{z_2}$, on multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué $\bar{z}_2$ du dénominateur.

Exemple:

$$\frac{2+3i}{1+3i} = \frac{(2+3i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} = \frac{2-6i+3i-9i^2}{1^2+3^2} = \frac{11-3i}{10} = 1,1 - 0,3i.$$

Exercice:

Exprimer les nombres complexes suivants sous leur forme algébrique :

$$\bullet \frac{1+2i}{1+i}$$

$$\bullet \frac{1}{i}$$

Propriété:

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes, on a :

$$\bullet \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$\bullet \overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$$

$$\bullet \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

Exemple:

- $\bullet \overline{(3+4i) + (7+5i)} = \overline{3+4i} + \overline{7+5i} = 3-4i + 7-5i = 10-9i$
- $\bullet \overline{(3+4i) \times (7+5i)} = \overline{3+4i} \times \overline{7+5i} = (3-4i) \times (7-5i) = 21 - 15i - 28i + 20i^2 = 1 - 43i$

3 Exercice bilan

1. Soient $z_1 = 5 + i$, $z_2 = 3 - 4i$ et $z_3 = 2 - \sqrt{5}i$. Calculer :

a. $z_1 - z_3$

b. z_2^2

2. Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

a. $z_1 = \frac{3 - i}{1 + 2i}$

b. $z_2 = \frac{5 - 2i}{2 + 5i}$

3. Résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{C}$:

a. $5z + 8 - 3i = 3 - 4i$

b. $(3 - i)z - 1 = -2 + 3i$