Chapitre 5 : Dérivation

Table des matières

Contenu

- Notations : $\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{x_0}$; $\dfrac{dy}{dx}(x_0)$, $\dfrac{df}{dx}(x_0)$, $f'(x_0)$.
- Calcul des dérivées : d'une somme, d'un inverse, d'un produit, d'un quotient, d'un polynôme et des fonctions cosinus et sinus.

Dans le dernier cours sur la dérivation, on a étudié la définition, l'interprétation et l'utilité que représentait le nombre dérivé d'une fonction en un point donné.

1 Point de vue local

1.1 Nombre dérivé et notations de variations

Définition:
Soit y une fonction de x, c'est-à-dire $y = f(x)$.

- Si x subit une variation notée Δx autour d'une valeur x_0, alors y subit une variation notée Δy.
- Le taux de variation entre le point d'abscisse x_0 et le point d'abscisse $x_0 + \Delta x$ est noté $\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{x_0}$.
- Lorsque Δx tend vers 0, on aura alors l'expression du taux d'accroissement et du nombre dérivé au point d'abscisse x_0 donné par $\dfrac{dy}{dx}(x_0) = \dfrac{df}{dx}(x_0) = f'(x_0)$.

1.2 Approximation affine d'une fonction au voisinage d'un point

Définition:
Soit T la tangente à la courbe représentative d'une fonction au point d'abscisse x_0. On a donc $T\,:\, y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.

- Si x est proche de x_0, on peut écrire $f(x) \simeq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.
- Si on pose $x = x_0 + h$, avec h proche de 0, on peut écrire $f(x_0 + h) \simeq f(x_0) + f'(x_0) \times h$.
  On dira que c'est l'approximation affine de $f(x_0 + h)$ pour h proche de 0.

2 Point de vue global

2.1 Fonction dérivée

En plus des fonctions polynômiales étudiées dans le tronc commun, on peut dériver d'autres types de fonction suivant le tableau ci-dessous :

	Fonction f	**Dérivée** f'
Constante	$f(x) = a,\ a \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
Linéaire	$f(x) = ax,\ a \in \mathbb{R}$	$f'(x) = a$
Carré	$f(x) = ax^2,\ a \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 2ax$
Puissance	$f(x) = ax^n,\ (a, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^*$	$f'(x) = nax^{n-1}$
Inverse	$f(x) = \dfrac{a}{x},\ a \in \mathbb{R}$	$f'(x) = -\dfrac{a}{x^2}$
Cosinus	$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
Sinus	$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$

Exercice:
Dériver les fonctions suivantes sur leur ensemble de dérivabilité :

- $f : x \mapsto 4x - 3$
- $g : x \mapsto 2x^5$
- $h : x \mapsto \dfrac{2}{x}$
- $p : x \mapsto -\cos x$

2.2 Opérations sur les dérivées

Propriétés:
Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k un réel :

- Somme : $(u+v)' = u' + v'$;
- Produit par un scalaire : $(ku)' = ku'$;
- Produit de fonctions : $(uv)' = u'v + uv'$;
- Inverse : $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$, si v ne s'annule pas sur I ;
- Quotient : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, si v ne s'annule pas sur I.

Exercice:
Dériver les fonctions suivantes sur leur ensemble de dérivabilité:

- $f : x \mapsto x^2 + \frac{1}{x}$
- $g : x \mapsto 5x^3 - 2$
- $h : x \mapsto \frac{x+1}{x-2}$
- $\phi : x \mapsto \frac{5x}{x^2+1}$
- $\psi : x \mapsto \frac{x\cos(x)}{3}$

Propriétés:
Soit g une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Soient a et b des réels quelconques. Alors, la fonction f, définie par $f : x \mapsto g(ax+b)$, est dérivable sur I: $\forall x \in I, f'(x) = a \times g(ax+b)$.

Exemple:
Soit $f(t) = \cos(\omega t + \phi)$, on a $\frac{df}{dt} = f'(t) = \omega \times (-\sin(\omega t + \phi))$.

Exercice:
Dériver les fonctions suivantes sur leur intervalle de dérivabilité :

- $f : x \mapsto (2x+1)^2$
- $g : x \mapsto -2\sin\left(5x - \frac{7\pi}{2}\right)$

Remarque

La dérivée permet de déterminer les variations d'une fonction quel que soit le cas (même quand sa forme n'est pas simple).

3 Exercice bilan

Dresser le tableau de variation des fonctions suivantes sur l'intervalle I :

1. $f : x \mapsto \dfrac{3x}{4x-6}$ sur $I =]-3;2]$.
2. $g : x \mapsto \cos(x)\sin(x)$ sur $I =]-\pi;\pi]$.