Chapitre 6 : Primitives

Table des matières

Contenu

- Définition d'une primitive.
- Deux primitives d'une même fonction sur un intervalle diffèrent d'une constante.
- Primitives d'un polynôme.
- Primitives des fonctions $t \mapsto A\cos(\omega t + \phi)$ et $t \mapsto A\sin(\omega t + \phi)$.
- Exemples de calcul approché d'une primitive par la méthode d'Euler.

1 Notion de primitive

Définition:
Soit F une fonction définie sur $I \subset \mathbb{R}$. On dit que F est une primitive de f lorsque F est dérivable sur I et que $F' = f$.

Remarque

Il n'y a pas unicité d'une primitive.

Exemple:
Une primitive de $f : x \mapsto 3x^2 + 2x + 8$ est donné par $F : x \mapsto x^3 + x^2 + 8x$. En effet on a bien $F' = f$.

Théorème:
Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.

Propriété:
Soit F une primitive d'une fonction f définies sur I. Les primitives de f sont données par les fonctions $G = F + k$, $k \in \mathbb{R}$.

Propriété:
Soit f une fonction admettant des primitives sur I. Soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Il existe une unique primitive F telle que $F(x_0) = y_0$.

Exercice:
Vérifier que $F : x \mapsto \frac{5}{2}x^2 + 3x - 2$ avec $F(1) = \frac{7}{2}$. est l'unique primitive de $f : x \mapsto 5x + 3$.

2 Primitives et fonctions de références

A l'aide du tableau des dérivées des fonctions de références, on en déduit les primitives suivantes.

	Fonction f	**Primitive** F
Constante	$f(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$ sur $I = \mathbb{R}$	$F(x) = ax + k$ sur $I = \mathbb{R}$
Puissance	$f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ sur $I = \mathbb{R}$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$ sur $I = \mathbb{R}$
Cosinus	$f(x) = \cos(x)$ sur $I = \mathbb{R}$	$F(x) = \sin(x) + k$ sur $I = \mathbb{R}$
Sinus	$f(x) = \sin(x)$ sur $I = \mathbb{R}$	$F(x) = -\cos(x) + k$ sur $I = \mathbb{R}$
Sinusoïde	$f(x) = A\cos(\omega x + \phi)$ sur $I = \mathbb{R}$	$F(x) = \frac{A}{\omega}\sin(\omega x + \phi) + k$ sur $I = \mathbb{R}$

3 Primitives et opérations sur les fonctions

Propriété:

- Soit F et G des primitives respectives de f et g sur I. $F + G$ est alors une primitive de $f + g$.
- Soit F une primitive de f sur I et $\alpha \in \mathbb{R}$. αF est alors une primitive de αf.

Remarque

Contrairement à la dérivation, il n'existe pas de formule permettant de trouver directement une primitive d'un produit ou d'un quotient de fonctions.

4 Exercice bilan

Déterminer la primitive des fonctions suivantes respectant la condition initiale.

1. $f : x \mapsto 23x^{24} - 11x^{12} + 1$ avec $f(1) = 8$.
2. $g : x \mapsto 5\sin\left(3x + \dfrac{5\pi}{2}\right) - 3\cos\left(5x + \dfrac{2\pi}{5}\right)$ avec $g(\pi) = 1$.