Chapitre 3 : Nombres complexes (forme algébrique)

Axel Carpentier

Première technologique :

Sciences et technologies de l'industrie et du développement durable (STI2D)

Table des matières

1. Notion de nombre complexe

2. Opérations entre nombres complexes
   2.1 Addition, soustraction et multiplication
   2.2 Conjugaison et opérations

3. Exercice bilan

Notion de nombre complexe

Définition:

Un nombre z est dit complexe s'il s'écrit de manière unique sous la forme $z = a + ib$ où :

- i est un nombre dit imaginaire définit par $i^2 = -1$.
- a est un nombre réel : c'est la partie réelle de z.
- b est un nombre réel : c'est la partie imaginaire de z.

L'ensemble des nombres complexes se note $\mathbb{C}$.

Remarque

Tous les nombres réels sont des nombres complexes, en effet $z = 8$ s'écrit également $z = 8 + 0i$.
On a donc l'inclusion d'ensembles $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Notion de nombre complexe

<u>Exercice:</u>

Donner la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants :

- $z_1 = -5 + 3i$
- $z_2 = 1,5 + 3,3i$
- $z_3 = \frac{3}{4}i + 5$
- $z_4 = -i$

Notion de nombre complexe

Remarque

En physique, on note j le nombre complexe i pour éviter la confusion avec la notation du courant électrique.

Addition, soustraction et multiplication

Propriété:

Sur l'ensemble $\mathbb{C}$, les propriétés de calculs entre deux nombres sont les mêmes que sur l'ensemble $\mathbb{R}$.

Exemple:

- $(3+4i)+(7+5i) = 3+4i+7+5i = 10+9i$
- $(3+4i)-(7+5i) = 3+4i-7-5i = -4-i$
- $(3+4i)\times(7+5i) = 3\times7+3\times5i+4i\times7+4i\times5i = 21+15i+28i+20i^2 = 1+43i$

Exercice:

Calculer l'addition, la soustraction et la multiplication de $z_1 = \dfrac{1}{2} - 3i$ par $z_2 = 1 - \dfrac{4}{3}i$.

Conjugaison et opérations

Définition:

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe, on appelle conjugué de z, noté $\overline{z}$, le nombre complexe $\overline{z} = a - ib$.

Exercice:

Déterminer le conjugué des nombres complexes $z_1 = \frac{1}{2} - 3i$ et $z_2 = 1 - \frac{4}{3}i$.

Conjugaison et opérations

Propriété:

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe, on a $z \times \overline{z} = a^2 + b^2$.

Méthode:

Soit z_1 et $z_2 \neq 0$ deux nombres complexes. Pour déterminer la forme algébrique de $\frac{z_1}{z_2}$, on multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué $\overline{z_2}$ du dénominateur.

Exemple:

$$\frac{2+3i}{1+3i} = \frac{(2+3i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} = \frac{2-6i+3i-9i^2}{1^2+3^2} = \frac{11-3i}{10} = 1,1-0,3i.$$

Exercice:

Exprimer les nombres complexes suivants sous leur forme algébrique :

- $\dfrac{1+2i}{1+i}$
- $\dfrac{1}{i}$

Conjugaison et opérations

Propriété:

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes, on a :

- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$
- $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

Exemple:

- $\overline{(3+4i)+(7+5i)} = \overline{3+4i} + \overline{7+5i} = 3-4i+7-5i = 10-9i$
- $\overline{(3+4i)\times(7+5i)} = \overline{3+4i} \times \overline{7+5i} = (3-4i)\times(7-5i) = 21-15i-28i+20i^2 = 1-43i$

Exercice bilan

1. Soient $z_1 = 5 + i$, $z_2 = 3 - 4i$ et $z_3 = 2 - \sqrt{5}i$. Calculer :

   1.1 $z_1 - z_3$

   1.2 z_2^2

2. Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

   2.1 $z_1 = \dfrac{3 - i}{1 + 2i}$

   2.2 $z_2 = \dfrac{5 - 2i}{2 + 5i}$

3. Résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{C}$:

   3.1 $5z + 8 - 3i = 3 - 4i$

   3.2 $(3 - i)z - 1 = -2 + 3i$