Chapitre 5 : Dérivation

Axel Carpentier

Première technologique :

Sciences et technologies de l'industrie et du développement durable (STI2D)

Table des matières

Nombre dérivé et notations de variations

Définition:

Soit y une fonction de x, c'est-à-dire $y = f(x)$.

- Si x subit une variation notée Δx autour d'une valeur x_0, alors y subit une variation notée Δy.
- Le taux de variation entre le point d'abscisse x_0 et le point d'abscisse $x_0 + \Delta x$ est noté $\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{x_0}$.
- Lorsque Δx tend vers 0, on aura alors l'expression du taux d'accroissement et du nombre dérivé au point d'abscisse x_0 donné par $\dfrac{dy}{dx}(x_0) = \dfrac{df}{dx}(x_0) = f'(x_0)$.

Approximation affine d'une fonction au voisinage d'un point.

Définition:

Soit T la tangente à la courbe représentative d'une fonction au point d'abscisse x_0. On a donc $T : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

- Si x est proche de x_0, on peut écrire $f(x) \simeq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.
- Si on pose $x = x_0 + h$, avec h proche de 0, on peut écrire
  $f(x_0 + h) \simeq f(x_0) + f'(x_0) \times h$.
  On dira que c'est l'approximation affine de $f(x_0 + h)$ pour h proche de 0.

Fonction dérivée

En plus des fonctions polynômiales étudiées dans le tronc commun, on peut dériver d'autres types de fonction suivant le tableau ci-dessous :

	Fonction f	**Dérivée** f'
Constante	$f(x) = a,\ a \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
Linéaire	$f(x) = ax,\ a \in \mathbb{R}$	$f'(x) = a$
Carré	$f(x) = ax^2,\ a \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 2ax$
Puissance	$f(x) = ax^n,\ (a, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^*$	$f'(x) = nax^{n-1}$
Inverse	$f(x) = \frac{a}{x},\ a \in \mathbb{R}$	$f'(x) = -\frac{a}{x^2}$
Cosinus	$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
Sinus	$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$

Fonction dérivée

Exercice:

Dériver les fonctions suivantes sur leur ensemble de dérivabilité :

- $f : x \mapsto 4x - 3$
- $g : x \mapsto 2x^5$
- $h : x \mapsto \dfrac{2}{x}$
- $p : x \mapsto -\cos x$

Opérations sur les dérivées

Propriété:

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k un réel :

- Somme : $(u+v)' = u' + v'$;
- Produit par un scalaire : $(ku)' = ku'$;
- Produit de fonctions : $(uv)' = u'v + uv'$;
- Inverse : $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$, si v ne s'annule pas sur I ;
- Quotient : $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, si v ne s'annule pas sur I.

Opérations sur les dérivées

<u>Exercice</u>:
Dériver les fonctions suivantes sur leur ensemble de dérivabilité:

- $f : x \mapsto x^2 + \dfrac{1}{x}$
- $g : x \mapsto 5x^3 - 2$
- $h : x \mapsto \dfrac{x+1}{x-2}$
- $\phi : x \mapsto \dfrac{5x}{x^2+1}$
- $\psi : x \mapsto \dfrac{x\cos(x)}{3}$

Opérations sur les dérivées

Propriété:

Soit g une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Soient a et b des réels quelconques. Alors, la fonction f, définie par $f : x \mapsto g(ax+b)$, est dérivable sur I:

$$\forall x \in I, f'(x) = a \times g(ax+b)$$

.

Exemple:

Soit $f(t) = \cos(\omega t + \phi)$, on a $\dfrac{df}{dt} = f'(t) = \omega \times (-\sin(\omega t + \phi))$.

Exercice:
Dériver les fonctions suivantes sur leur intervalle de dérivabilité :

- $f : x \mapsto (2x+1)^2$
- $g : x \mapsto -2\sin\left(5x - \dfrac{7\pi}{2}\right)$

Remarque

La dérivée permet de déterminer les variations d'une fonction quel que soit le cas (même quand sa forme n'est pas simple).

Exercice bilan

Dresser le tableau de variation des fonctions suivantes sur l'intervalle I :

1. $f : x \mapsto \dfrac{3x}{4x-6}$ sur $I =]-3;2]$.
2. $g : x \mapsto \cos(x)\sin(x)$ sur $I =]-\pi;\pi]$.