

Chapitre 6 : Primitives

Axel Carpentier

Première technologique :

Sciences et technologies de l'industrie et du développement durable (STI2D)

Table des matières

1. Notion de primitive
2. Primitives et fonctions de références
3. Primitives et opérations sur les fonctions
4. Exercice bilan

Définition:

Soit F une fonction définie sur $I \subset \mathbb{R}$. On dit que F est une primitive de f lorsque F est dérivable sur I et que $F' = f$.

Remarque

Il n'y a pas unicité d'une primitive.

Exemple:

Une primitive de $f : x \mapsto 3x^2 + 2x + 8$ est donné par $F : x \mapsto x^3 + x^2 + 8x$. En effet on a bien $F' = f$.

Théorème:

Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.

Propriété:

Soit F une primitive d'une fonction f définies sur I . Les primitives de f sont données par les fonctions $G = F + k, k \in \mathbb{R}$.

Propriété:

Soit f une fonction admettant des primitives sur I . Soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Il existe une unique primitive F telle que $F(x_0) = y_0$.

Exercice:

Vérifier que $F : x \mapsto \frac{5}{2}x^2 + 3x - 2$ avec $F(1) = \frac{7}{2}$ est l'unique primitive de $f : x \mapsto 5x + 3$.

Primitives et fonctions de références

A l'aide du tableau des dérivées des fonctions de références, on en déduit les primitives suivantes.

	Fonction f	Primitive F
Constante	$f(x) = a, a \in \mathbb{R} \text{ sur } I = \mathbb{R}$	$F(x) = ax + k \text{ sur } I = \mathbb{R}$
Puissance	$f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}^* \text{ sur } I = \mathbb{R}$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k \text{ sur } I = \mathbb{R}$
Cosinus	$f(x) = \cos(x) \text{ sur } I = \mathbb{R}$	$F(x) = \sin(x) + k \text{ sur } I = \mathbb{R}$
Sinus	$f(x) = \sin(x) \text{ sur } I = \mathbb{R}$	$F(x) = -\cos(x) + k \text{ sur } I = \mathbb{R}$
Sinusoïde	$f(x) = A \cos(\omega x + \phi) \text{ sur } I = \mathbb{R}$	$F(x) = \frac{A}{\omega} \sin(\omega x + \phi) + k \text{ sur } I = \mathbb{R}$

Propriété:

- Soit F et G des primitives respectives de f et g sur I . $F + G$ est alors une primitive de $f + g$.
- Soit F une primitive de f sur I et $\alpha \in \mathbb{R}$. αF est alors une primitive de αf .

Remarque

Contrairement à la dérivation, il n'existe pas de formule permettant de trouver directement une primitive d'un produit ou d'un quotient de fonctions.

Déterminer la primitive des fonctions suivantes respectant la condition initiale.

1. $f : x \mapsto 23x^{24} - 11x^{12} + 1$ avec $f(1) = 8$.

2. $g : x \mapsto 5 \sin \left(3x + \frac{5\pi}{2} \right) - 3 \cos \left(5x + \frac{2\pi}{5} \right)$ avec $g(\pi) = 1$.