1 Trigonométrie

1.1 Compétences Attendues

- Effectuer des conversions de degré en radian, de radian en degré.
- Résoudre, par lecture sur le cercle trigonométrique, des équations du type $\cos(x) = a$ et $\sin(x) = a$.
- Connaître et utiliser les relations entre sinus et cosinus des angles associés : x ; $-x$; $\pi - x$; $\pi + x$; $\frac{\pi}{2} - x$; $\frac{\pi}{2} + x$.
- Utiliser ces relations pour justifier les propriétés de symétrie des courbes des fonctions circulaires.

1.2 Exercices

Exercice 1:
Convertir les mesures des angles suivants en degrés :

1. $\frac{\pi}{12}$ rad
2. $\frac{\pi}{5}$ rad
3. $\frac{2\pi}{7}$ rad

Exercice 2:
Convertir les mesures des angles suivants en degrés (arrondir à l'unité près) :

1. $0,314$ rad
2. $1,75$ rad
3. $7,35$ rad

Exercice 3:
Convertir les mesures des angles suivants en radians :

1. 120°
2. 15°
3. 72°

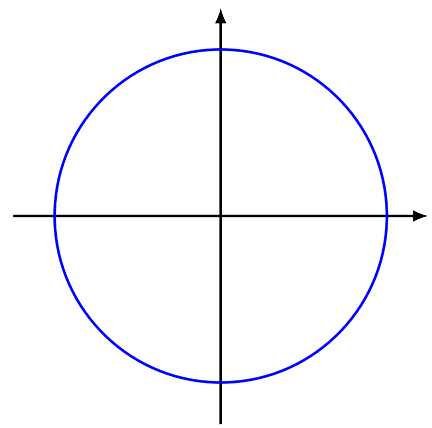
Exercice 4:
Convertir les mesures des angles suivants en degrés (arrondir au millième près) :

1. 95°
2. 135°
3. 275°

Exercice 5:

Placer sur le cercle trigonométrique les points A, B, C, D, E, F, G, H, I et J associés respectivement, par enroulement de la droite numérique, aux nombres réels suivants :

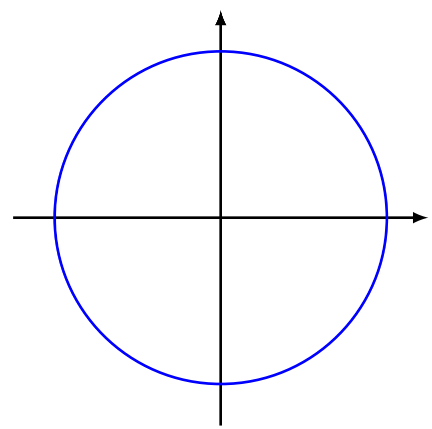
1. 13π
2. $\frac{3\pi}{5}$
3. $-\frac{11\pi}{4}$
4. -26π
5. $-\frac{16\pi}{3}$
6. $\frac{101\pi}{2}$
7. $\frac{37\pi}{2}$
8. $-\frac{7\pi}{6}$
9. $\frac{28\pi}{3}$
10. $-\frac{15\pi}{7}$



Exercice 6:

Placer sur le cercle trigonométrique les points A, B, C, D, E, F, G, H, I et J associés respectivement, par enroulement de la droite numérique, aux nombres réels suivants :

1. $\frac{50\pi}{3}$
2. $\frac{19\pi}{6}$
3. $-\frac{25\pi}{4}$
4. 151π
5. $\frac{25\pi}{2}$
6. $-\frac{43\pi}{3}$
7. $\frac{2\pi}{15}$
8. $-\frac{7\pi}{10}$



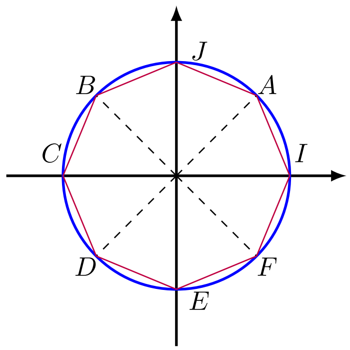
Exercice 7:
Déterminer la mesure principale des angles dont une mesure est :

1. $\frac{13\pi}{4}$
2. $\frac{8\pi}{3}$
3. $\frac{11\pi}{6}$
4. $\frac{21\pi}{2}$
5. $-\frac{17\pi}{4}$
6. $-\frac{11\pi}{3}$
7. $-\frac{19\pi}{6}$
8. $\frac{221\pi}{4}$
9. $-\frac{121\pi}{3}$
10. $\frac{365\pi}{6}$

Exercice 8:

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

1. $IAJBCDEF$ est un octogone régulier de centre O. Donner un nombre $[0; 2\pi[$ associé à chacun des sommets de cet octogone.
2. Donner de même un nombre réel associé à chacun des sommets d'un hexagone régulier $IGHKLM$ de centre O inscrit dans le cercle trigonométrique.



Exercice 9:
Sans utiliser la calculatrice et en utilisant des valeurs remarquables, déterminer les valeurs exactes du cosinus et du sinus des nombres réels suivant :

1. $\frac{15\pi}{3}$
2. $-\frac{9\pi}{4}$
3. $-\frac{7\pi}{6}$
4. $-\frac{5\pi}{2}$
5. $-\frac{28\pi}{3}$
6. $\frac{2018\pi}{4}$
7. $\frac{101\pi}{6}$
8. $\frac{70\pi}{3}$
9. $-\frac{25\pi}{4}$
10. $-\frac{15\pi}{2}$
11. $\frac{43\pi}{4}$
12. $\frac{19\pi}{6}$
13. $-\frac{21\pi}{2}$
14. $\frac{1981\pi}{3}$

Exercice 10:
Calculer chaque expression, donner si nécessaire le résulat sous forme d'une fraction simplifiée.

1. $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)$
2. $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$
3. $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$
4. $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos(\pi)$

Exercice 11:

1. Vérifier que $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} = \frac{3\pi}{10}$.
2. Exprimer $\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)$ et $\sin\left(\frac{3\pi}{10}\right)$ en fonction de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Exercice 12:
On admet que $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

1. Calculer la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.
2. Sachant que $\frac{6\pi}{5} = \pi + \frac{\pi}{5}$, en déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{6\pi}{5}\right)$.
3. Sachant que $\frac{3\pi}{10} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}$, en déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)$ et $\sin\left(\frac{3\pi}{10}\right)$.

Exercice 13:
Simplifier les expressions suivantes :

1. $A = \cos(\pi + x) + 2\cos(-x)$
2. $B = \sin(\pi + x) + 2\sin(-x)$
3. $C = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 2\cos(-x)$
4. $D = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos(-x)$

Exercice 14:
Simplifier les expressions suivantes :

1. $E = \cos(\pi - x) + \cos(\pi + x) - \cos(2\pi + x)$
2. $F = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos(\pi - x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

Exercice 15:

1. Simplifier l'expression $G = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2\cos(-x) + 3\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$
2. Calculer G quand $x = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 16:
Dans chaque cas, déterminer le ou les valeurs de $x \in \mathbb{R}$ vérifiant la condition donnée.

1. $\sin(x) = \frac{1}{2}$ et $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

2. $\cos(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$
3. $\sin(x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $x \in \left[-\pi; -\dfrac{\pi}{2}\right]$
4. $\cos(x) = -1$ et $x \in \left[-\pi; \dfrac{\pi}{2}\right]$
5. $2\cos(x) + 1 = 0$ et $x \in [-\pi; \pi[$
6. $\cos(x) = \sin(x)$ et $x \in [-\pi; \pi[$
7. $2\cos^2(x) - 1 = 0$ et $x \in [-\pi; \pi[$

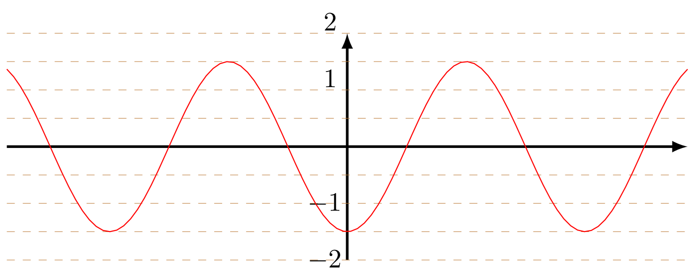
Exercice 17:
Etudier la parité et la périodicité des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \cos(2x)$
2. $g : x \mapsto 2\sin(x) - 1$
3. $h : x \mapsto \sin(3x)$
4. $k : x \mapsto x - \cos(x)$
5. $\phi : x \mapsto \cos(x)\sin(x)$
6. $\psi : x \mapsto \cos^2(x)$
7. $\rho : x \mapsto \sin^2(x)$
8. $\theta : x \mapsto x + \sin(x)$

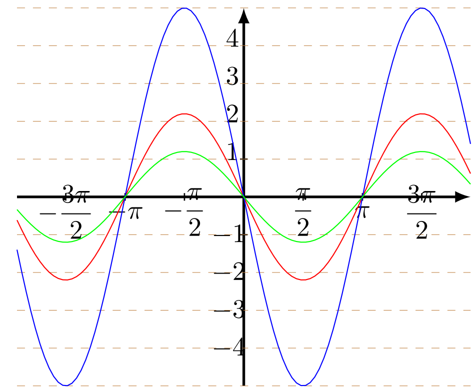
Exercice 18:
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto 2\cos(x) - 1$.

1. Etudier la parité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. Etudier la périodicité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3. Résoudre pour tout $x \in [0; \pi]$ l'équation $f(x) = 0$.
4. Dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J), tracer la courbe représentative de f sur l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$.

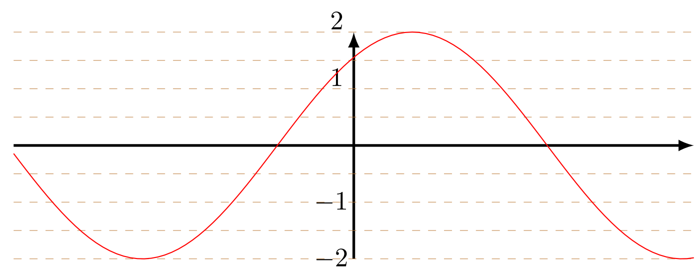
Exercice 19:
Avec la précision permise par le graphique, déterminer l'amplitude, la période et la phase à l'origine de $h(t) = A\cos(\omega t + \phi)$.



Exercice 20:
Déterminer l'amplitude des trois signaux représentés par les courbes ci-dessous :



Exercice 21:
Avec la précision permise par le graphique, déterminer l'amplitude, la période et la phase à l'origine de $g(t) = A\sin(\omega t + \phi)$.



Exercice 22:
Quelle est l'amplitude A de la fonction f_1 telle que $f_1(t) = A\cos\left(2t + \dfrac{2\pi}{5}\right)$ sachant que $f_1\left(\dfrac{3\pi}{10}\right) = -7,5$?

Exercice 23:
Soit $h : t \mapsto 4,2\sin\left(20t + \dfrac{5\pi}{4}\right)$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Donner l'amplitude, la période, la pulsation et la phase à l'origine de cette fonction.
2. Calculer $h\left(\dfrac{3\pi}{16}\right)$, $h\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ et $h\left(-\dfrac{5\pi}{4}\right)$.

Exercice 24:
Un des funiculaires de Lyon relie le Vieux Lyon au quartir de Fourvière. Il permet de s'élever de 116 mètres sur un trajet long de 427 mètres.

1. Déterminer la mesure de l'angle α de la pente en degrés (à $0,1$ près).
2. Convertir cette mesure en radians.
3. Le téléphérique met 3 minutes pour parcourir cette distance. Quelle est sa vitesse moyenne en m/s ?
4. Sa vitesse instantanée, en m/s, est donnée par
$$v(t) = 5,95\sin\left(-\frac{\pi}{180}t + \pi\right)$$
. Quelle est sa vitesse au bout de 10 secondes ? d'une minute ?
5. A quel moment le téléphérique atteint-il sa vitesse maximale ?
6. La vitesse maximale doit être inférieure à 6 m/s. Ce critère est-il respecté ?

Exercice 25:
La température dans une ville est modélisée par la donnée
$$\theta(t) = 1(,7\sin\left(\frac{\pi}{6}(t-3)\right)$$
où t est exprimé en mois. Le 1er janvier correspond à $t = 0$.

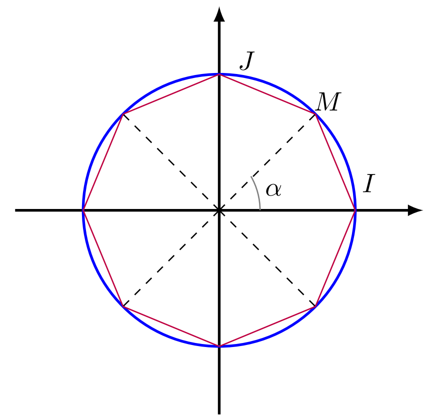
1. Quelle est la température le 1er février ? le 1er décembre ?
2. Quels sont les températures extrêmes ? A quelles dates correspondent-elles ?
3. Avec quelle périodicité retrouve-t-on des températures analogues ?

Exercice 26:
La ville de Madrid est située sur la parallèle de latitude 40° Nord. Pendant une année non bissextile, le nombre d'heures de lumière d'une ville située à cette latitude peut être modélisé par la fonction d définie sur $[0; 365]$ par :
$$d(t) = 3\sin\left(\frac{\pi}{182}(t-80)\right) + 12$$
où t représente le t-ième jour de l'année.
Déterminer la période l'année durant laquelle Madrid bénéficie de plus d'heures de lumière par jour.

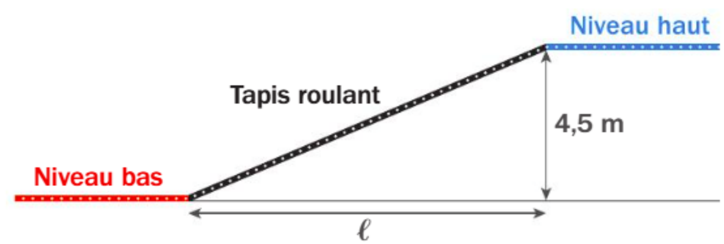
Exercice 27:

Un polygone régulier à n côtés est inscrit dans le cercle trigonométrique de centre O. La figure ci-contre représente un octogone.

1. Dans ce cas $n = 8$ et $\widehat{IOM} = \alpha = \frac{\pi}{4}$, calculer l'aire A_8 de cet octogone.
2. De façon générale, pour un polygone régulier à n côtés, on pose $\alpha = \frac{2\pi}{n}$. Démontrer que l'aire d'un polygone régulier à n côtés est égale à $A_n = \pi\frac{\sin(\alpha)}{\alpha}$.
3. A l'aide d'un outil numérique, représenter sur $[0;\pi]$ la fonction f définie par $f : x \mapsto \pi\frac{\sin(x)}{x}$.
4. A l'aide de la courbe représentative de f, si n devient très grand, quelle conjecture peut-on faire ? En déduire une autre conjecture géométrique concernant l'aire du polygone inscrit.



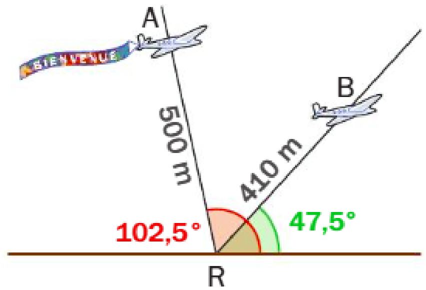
Exercice 28:
Dans un aéroport en construction, un architecte souhaite installer un tapis roulant pour permettre au public de passer d'un niveau à l'autre en moins d'une minute.



Le tapis roulant sélectionné, représenté ci-dessus , possède une vitesse de roulement de $0,8m/s$ et une pente maximale de 10%. La distance entre kes deux niveaux est de $4,5m$ et on note l la longueur au sol du niveau bas occupée par le tapis roulant. Donenr un encadrement de la longueur l pour que les contraintes soient satisfaites. On pourra utiliser la calculatrice.

Exercice 29:

Deux petits avions A et B se déplacent en bordure d'une plage en été, l'un pour déployer un banderole publicitaire et l'autre pour photographier la plage. Dans le même plan vertical que ces deux avions, un radar R repère du sol de la plage leur position comme sur la figure ci-contre. PAr arrêté municipal dans cette commune et pour des raison de sécurité, la hauteur minimale de survol de la plage est fixée à $300m$ et la distance horizontale minimale séparant deux avions est de $500m$. Ces deux avions respectent-ils les distance de sécurité imposées ? Justifier.



Exercice 30:

La planète Mars, aussi appelée la planète rouge, peut-être observée à l'oeil nu depuis la Terre. Comme la Terre, Mars tourne autour du Soleil sur une orbite quasi circulaire. Les orbites de la Terre et de MArs sont à peu près coplanaires. Les astronomes ont observé qu'à un moment précis d'une année, le Soleil, la Terre et Mars étaient en "opposition", c'est-à-dire que ces trois astres étaient alignés, avec la Terre entre Mars et le Soleil. On note T_1 et M_1 les positions respectives de la Terre et de Mars à cet instant et S la position du Soleil. Cent six jours plus tards, la Terre et Mars se sont déplacées pour atteindre les positions respectives T_2 et M_2 et sont alors en quadrature avec le Soleil, c'est-à-dire que l'angle $\widehat{M_2T_2S}$ est droit.

1. Calculer une valeur approchée au dixième de degré de la mesure de l'angle $\widehat{M_1SM_2}$, sachant que Mars tourne autour du Soleil en 687 jours.
2. Calculer une valeur approchée au dixième de degré de la mesure de l'angle $\widehat{T_1ST_2}$, puis de l'angle $\widehat{M_2ST_2}$ sachant que la Terre tourne autour du Soleil en 365 jours.
3. En déduire la distance de Mars au Soleil en fonction de celle de la Terre au Soleil.