

1 Produit scalaire

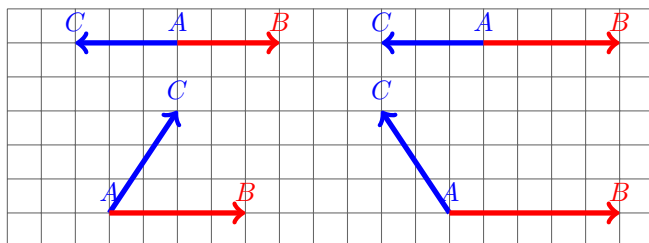
1.1 Compétences Attendues

- Calculer la projection d'un vecteur sur un axe.
- Interpréter $\|\vec{u}\| \times \cos(\theta)$ en termes de projection.
- Utiliser un produit scalaire pour démontrer l'orthogonalité de deux vecteurs, pour calculer un angle non orienté.
- Utiliser un produit scalaire pour calculer des longueurs.

1.2 Exercices

Exercice 1:

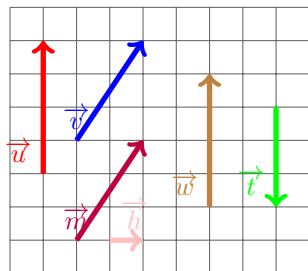
Calculer $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle$ dans chaque cas. Les carrés du quadrillage sont de côté 1.



Exercice 2:

Calculer les valeurs des produits scalaires suivants. Les carrés du quadrillage sont de côté 1.

- | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|
| 1. $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ | 4. $\langle \vec{w}, \vec{u} \rangle$ |
| 2. $\langle \vec{t}, \vec{w} \rangle$ | 5. $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ |
| 3. $\langle \vec{m}, \vec{h} \rangle$ | 6. $\langle \vec{m}, \vec{u} \rangle$ |

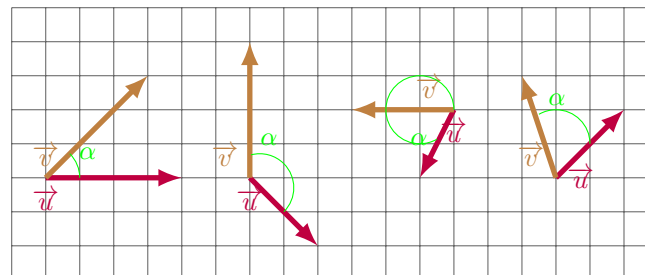


Exercice 3:

1. Pour chaque figure ci-dessous, calculer :

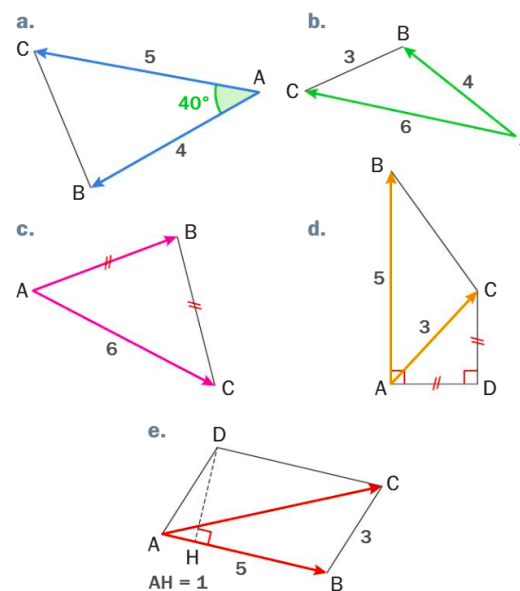
(a) $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$ | (b) $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$

2. En déduire la valeur de l'angle géométrique α .



Exercice 4:

Dans chaque cas, calculer le produit scalaire $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle$ en choisissant une méthode adaptée.



Exercice 5:

Soit ABC un triangle.

1. Déterminer, si possible, la longueur AC .

- (a) $AB = 3$, $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = -6$, $\widehat{BAC} = 60^\circ$.
 (b) $AB = 5$, $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = -10$, $\widehat{BAC} = 135^\circ$.

2. Déterminer, si possible, une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

(a) $AB = 2, AC = \sqrt{2} < \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} > = -2.$

(b) $AB = 5, AC = 2 < \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} > = 15.$

(c) $AB = 3, AC = 4 < \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} > = 12.$

Exercice 6:

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs : $\|\vec{u}\| = 2, \|\vec{v}\| = 5$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 7$. Calculer :

1. $\vec{u} \cdot (3\vec{v})$ | 2. $\vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v})$ | 3. $\vec{v} \cdot (\vec{u} - \vec{v})$

Exercice 7:

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs : $\|\vec{u}\| = \sqrt{2}, \|\vec{v}\| = 2\sqrt{2}$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$. On pose $\vec{w} = \vec{u} + 3\vec{v}$. Calculer :

1. $\|\vec{w}\|$ | 2. $\vec{u} \cdot \vec{w}$ | 3. $\vec{w} \cdot (\vec{u} - \vec{w})$

Exercice 8:

Soient $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan. Calculer les produits scalaires suivants :

1. $< \vec{u}, \vec{v} >$ | 3. $< -\vec{u}, 2\vec{v} >$
2. $< \vec{u}, -4\vec{v} >$ | 4. $< \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v} >$

Exercice 9:

$ABCD$ est un rectangle de longueur $AB = 6$ et de largeur $AC = 4$. E est un point du segment $[AB]$ défini par $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$. F est le projeté orthogonal du point B sur la droite (ED) .

- En calculant le produit scalaire $< \overrightarrow{EC}, \overrightarrow{ED} >$ de deux façons différentes, calculer l'angle $\widehat{DEC}$.
- En calculant le produit scalaire $< \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DE} >$ de deux façons différentes, calculer la longueur BF .

Exercice 10:

Les couples de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ suivants sont-ils orthogonaux ?

1. $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ | 2. $\vec{u} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}-1 \end{pmatrix}$

Exercice 11:

Dans chaque cas, calculer le produit scalaire $< \vec{u}, \vec{v} >$ et déterminer la (ou les) valeur(s) éventuelle(s) de m telle(s) que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.

1. $\vec{u} = \begin{pmatrix} 5-m \\ m \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ | 3. $\vec{u} = \begin{pmatrix} -m \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} m \\ 4 \end{pmatrix}$
2. $\vec{u} = \begin{pmatrix} m-2 \\ m \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3-m \\ m \end{pmatrix}$ | 4. $\vec{u} = \begin{pmatrix} m \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ m \end{pmatrix}$

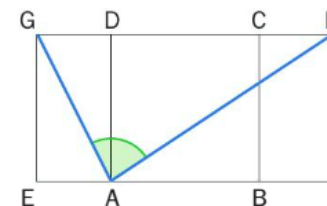
Exercice 12:

Utiliser le produit scalaire dans chaque cas pour déterminer si le triangle ABC est rectangle.

- $A(-2; 2), B(8; 4)$ et $C(3; -2)$
- $A(-1; 1, 5), B(0; 4)$ et $C(5; 2)$
- $A(8; 2), B(2; 4)$ et $C(-2; -8)$

Exercice 13:

$ABCD$ est un carré de côté 4. $ABCD$ et $BFHC$ sont deux rectangles de largeur 2. Etudier la perpendicularité des droites (AG) et (AH) en calculant le produit scalaire $< \overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AH} >$.



Exercice 14:

Soient $A(6; 1)$ et $B(-3; 3)$ deux points du plan et $\mathcal{D}$ une droite d'équation $y = 2x$ où $x, y \in \mathbb{R}$.

On cherche à déterminer s'il existe des points M appartenant à la droite $\mathcal{D}$ tels que les droites (AM) et (BM) soient perpendiculaires. On note $M(x; y)$.

- Si $M \in \mathcal{D}$, établir une relation entre x et y .
- Exprimer en fonction de x les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$.
- Calculer $< \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB} >$ en fonction de x puis conclure.

Exercice 15:

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $ABCD$ un carré de côté a . E est un point du segment $[AB]$ et F le point du segment $[AD]$ tel que $AE = DF$. On pose $AE = x$.

1. Exprimer en fonction de a et de x les produits scalaires $\langle \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{EA} \rangle$ et $\langle \overrightarrow{DF}, \overrightarrow{AD} \rangle$.
2. Démontrer que les droites (CF) et (ED) sont perpendiculaires.

Exercice 16:

1. Dans un triangle ABC , $AB = 6$, $AC = 15$ et $BC = 10$. Calculer une valeur approchée de la mesure de chaque angle.
2. Dans un triangle DEF , $DE = 10$, $DF = 7$ et $\widehat{D} = 60^\circ$.
3. Sachant que $IJ = 32$, $IK = 20$ et que $\widehat{JIK} = 30^\circ$, calculer la longueur JK .
4. Estimer l'angle $\widehat{GHL}$, sachant que $GH = 22$, $HL = 21$ et $GL = 25$.

Exercice 17:

Le triangle MNP est défini par $MN = 9$, $MP = 5$ et $NP = 7,5$. On note M' , N' et P' les milieux respectifs des segments $[NP]$, $[MP]$ et $[MN]$. Calculer la longueur de chaque médiane.

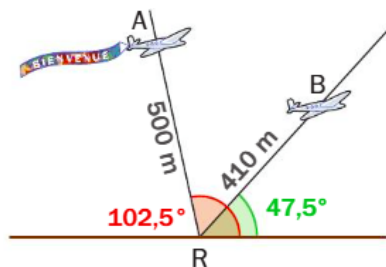
Exercice 18:

On donne $AB = 5$, $BC = 3$ et $\widehat{B} = 60^\circ$.

1. Calculer la longueur AC .
2. En déduire $\widehat{A}$ puis $\widehat{C}$.

Exercice 19:

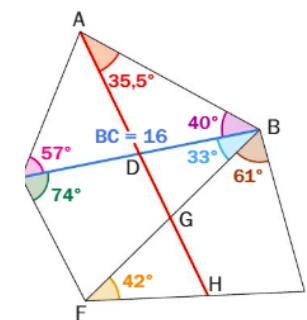
Le triangle ABC est tel que $AC = 7$, $AB = 10$ et $BC = 6,5$.



1. Déterminer une mesure de l'angle $\widehat{ACB}$.
2. Sachant que $\widehat{BCD} = \frac{1}{2}\widehat{ACB}$, déterminer une valeur approchée de CE , où E est le milieu du segment $[BD]$.

Exercice 20:

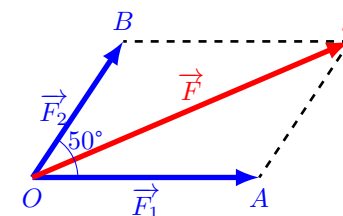
Afin d'estimer la longueur AG , on part d'une mesure connue ($BC = 16\text{ km}$) et on construit une chaîne de triangles dont les angles sont de mesures connues. Estimer la longueur AG .

**Exercice 21:**

Soit $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ deux forces s'exerçant sur un même point O et d'intensité $F_1 = 40$ N et $F_2 = 30$ N en formant un angle de 50° comme l'illustre le schéma.

Ces deux forces s'exerçant simultanément sur O peuvent être résumées par une seule force $\vec{F}$ appelée force résultante et obtenue par la relation $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. On

souhaite déterminer l'intensité et la direction de $\vec{F}$.



1. Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{OAS}$.
2. En déduire la valeur approchée à 0,01 près de la distance OS .
3. Calculer enfin l'angle $\widehat{AOS}$ à $0,1^\circ$ près.
4. Conclure par rapport au problème posé.

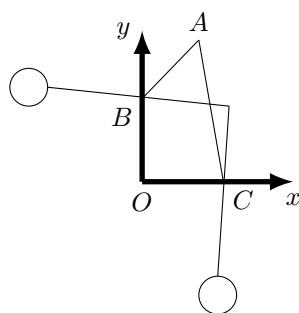
Exercice 22:

Le train avant d'un avion A380 est représenté par le schéma ci-dessous (qui n'est pas à l'échelle).

Le segment $[AC]$ représente le vérin en position "train sorti" et le segment $[AB]$ le vérin en position "train rentré".

On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ où $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont les vecteurs unitaires de (Ox) et (Oy) . En prenant 1 m comme unité graphique, on a repéré les points $A(0, 8; 2)$, $B(0; 1; 2)$ et $C(1; 1; 0)$. Le but de l'exercice est déterminer l'allongement $\delta = AC - AB$ et le débattement $\alpha = \widehat{BAC}$ du vérin.

- (a) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
(b) En déduire l'allongement du vérin, arrondi au millimètre près.
- (a) Calculer le produit scalaire $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle$.
(b) En déduire une mesure de α au dixième de degré près

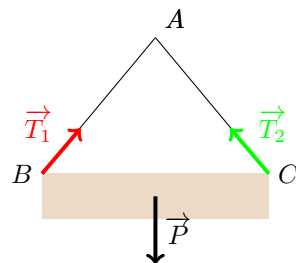
**Exercice 23:**

Afin de réduire les pertes aérodynamiques, les concepteurs de véhicules s'imposent une contrainte : la mesure de l'angle "capot/par-brise" doit être supérieure à 150° . On considère $O(0;0)$ l'origine d'un repère du plan (la jonction capot/pare-brise), $C(-92,7; -24,7)$ le bout du capot et $B(67,9; 37)$ le bout du pare-brise. La contrainte imposée est-elle vérifiée ? On pourra s'aider d'une représentation graphique.

Exercice 24:

Une poutrelle de poids inconnu est soulevée par deux élingues (accessoires de levage) $[AB]$ et $[AC]$ selon le schéma ci-contre :

Les forces imposées dans les élingues et le poids de la poutrelle sont respectivement représentées par les vecteurs $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$ et $\vec{P}$. $\alpha = \widehat{BAC}$ est l'angle entre deux élingues.



- On considère un repère orthonormé d'unité graphique 1 cm, où 1cm représente 1 000 Newton. $\vec{T}_1$ est représenté par le vecteur $\overrightarrow{OM_1}$ de coordonnées (4;5) et $\vec{T}_2$ par $\overrightarrow{OM_2}$ de coordonnées (-4;5). Placer les vecteurs $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OM_2}$ dans ce repère.
- (a) Construire dans ce repère le vecteur $\overrightarrow{OM}$ tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$.
(b) Calculer les coordonnées du point M.
(c) Tracer le vecteur $\vec{P} = -\overrightarrow{OM}$ et donner ses coordonnées.
(d) En déduire la valeur, en Newton, du poids de la charge.
- (a) Calculer $\langle \overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2} \rangle$, $\|\overrightarrow{OM_1}\|$ et $\|\overrightarrow{OM_2}\|$.

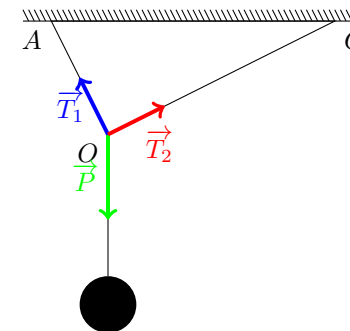
- (b) En déduire une valeur approchée à l'unité de la tension dans chaque élingue, exprimée en Newton.
- (c) Déterminer l'angle d'élingage α , arrondi au degré.

Exercice 25:

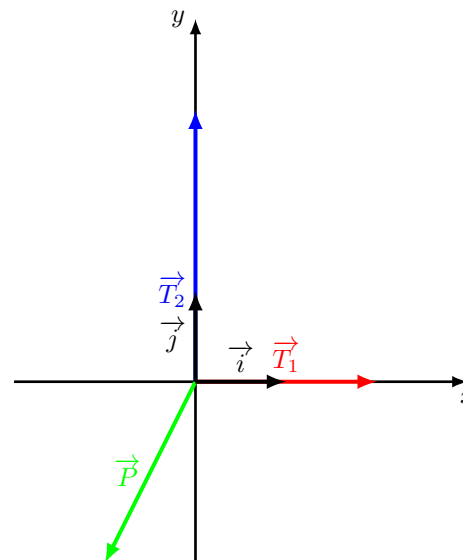
Un solide est en équilibre suspendu en O par deux cordes fixées en A et en C. Ce solide est soumis à trois forces :

- son poids : $\vec{P}$;
- les tensions $\vec{T}_1$ et $\vec{T}_2$ des deux cordes.

On sait que $\|\vec{P}\| = 100$ N. Les cordes forment un angle $\widehat{OAC} = 60^\circ$ et de $\widehat{OCA} = 30^\circ$ avec le support horizontal comme indiqué sur le schéma ci-contre.



On cherche à déterminer l'intensité des deux autres forces. Pour cela, on se place dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.



- On pose $\vec{P} = \vec{P}_x + \vec{P}_y$ où $\vec{P}_x$ et $\vec{P}_y$ sont les projetés orthogonaux de $\vec{P}$ sur les axes (Ox) et (Oy) . Calculer $\|\vec{P}_x\|$ et $\|\vec{P}_y\|$ en fonction de $\|\vec{P}\|$ et de θ .
- Faire de même pour les vecteurs $\vec{T}_1$ et $\vec{T}_2$.
- Dire que le solide est en équilibre signifie que

$$\vec{P} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = \vec{0}$$

. Montrer que

$$\begin{cases} \|\vec{T}_2\| - \|\vec{P}\| \sin(\theta) = 0 \\ \|\vec{T}_1\| - \|\vec{P}\| \cos(\theta) = 0 \end{cases}$$

- Justifier que l'angle θ formé par $\vec{P}$ et l'axe des ordonnées vaut 30° .
- En déduire l'intensité des forces $\vec{T}_1$ et $\vec{T}_2$.