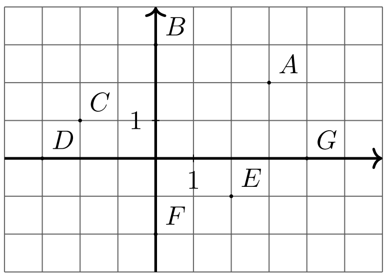
1 Nombres complexes : forme trigonométrique

1.1 Compétences Attendues

- Calculer et interpréter géométriquement la partie réelle, la partie imaginaire, le conjugué, le module et un argument d'un nombre complexe.
- Passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique et vice versa.

1.2 Exercices

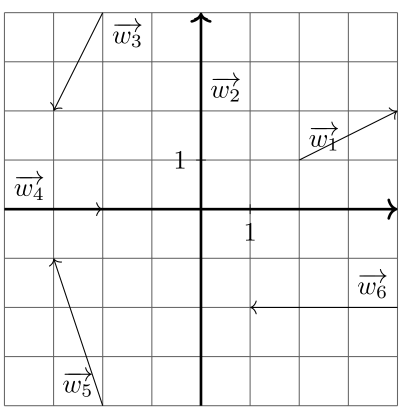
Exercice 1:
Dans le repère orthonormé direct déterminer les affixes des points les affixes des points A, B, C, D, E, F et G.



Exercice 2:

1. Placer les points $A(2;-3)$, $B(1;2)$, $C(0;-1)$ et $D(2;0)$ dans un repère orthonormé.
2. Déterminer les affixes de chacun de ces points

Exercice 3:
Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{w_1}$, $\overrightarrow{w_2}$, $\overrightarrow{w_3}$, $\overrightarrow{w_4}$, $\overrightarrow{w_5}$ et $\overrightarrow{w_6}$.



Exercice 4:
On considère le nombre complexe $z_1 = 2+3i$. Représenter dans un repère orthonormé direct les points :

- M_1 d'affixe z_1
- M_2 d'affixe $z_2 = -z_1$
- M_3 d'affixe $z_3 = \overline{z_1}$
- M_4 d'affixe $z_4 = -\overline{z_1}$

Exercice 5:
On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = -2+i$, $z_B = 3-i$, $z_C = 5-4i$ et $z_D = -2i$.

1. Placer les points A, B, C et D dans le plan complexe. Que peut-on conjecturer sur le nature du quadrilatère $ABCD$?
2. Déterminer les affixes respectives des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$.
3. Démontrer la conjecture.

Exercice 6:
Même énoncé que précédemment avec $z_A = -2i$, $z_B = 3-i$, $z_C = 5+2i$ et $z_D = 2+i$.

Exercice 7:
On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = -1-2i$, $z_B = 1-i$ et $z_C = 5+i$.

1. Placer les points A, B et C dans le plan complexe. Que peut-on conjecturer sur la position des points A, B et C ?
2. Déterminer les affixes respectives des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
3. Démontrer la conjecture.

Exercice 8:
Calculer le module des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = 2-3i$
2. $z_2 = 3-3i$
3. $z_3 = 1+5i$
4. $z_4 = 4i$
5. $z_5 = -\sqrt{6} - \sqrt{3}i$
6. $z_6 = 2\sqrt{3} - 2i$
7. $z_7 = 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}i$
8. $z_8 = \sqrt{7} + i$

Exercice 9:
On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 1+i$, $z_B = 2+3i$ et $z_C = 8$.

1. Placer les points A, B et C. Que peut-on conjecturer sur la nature du triangle ABC?

2. Déterminer $|z_B - z_A|$, $|z_C - z_B|$ et $|z_C - z_A|$.
3. Montrer que le triangle ABC est rectangle.

Exercice 10:
On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 2 - i$, $z_B = 4 + 3i$ et $z_C = 8 + i$. Montrer que le triangle ABC est isocèle rectangle.

Exercice 11:
Calculer le module des nombres complexes proposés.

1. $z_1 = \sqrt{2}(1+i)$
2. $z_2 = -3\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$
3. $z_3 = 2i\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$
4. $z_4 = (2+3i)(\sqrt{3}+i)$
5. $z_5 = \dfrac{1+\sqrt{2}i}{1-\sqrt{2}i}$
6. $z_6 = \dfrac{6+8i}{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}$
7. $z_7 = \dfrac{(1+i)(2+4i)}{1-i}$
8. $z_8 = \dfrac{(6+8i)(2+3i)}{6+9i}$

Exercice 12:
Soient $z_1 = 2 + 2i$, $z_2 = 2 - 2i$ et $z_3 = -2i$. Calculer :

1. Calculer les modules de z_1, z_2 et z_3.
2. En déduire les modules de $z_1 \times z_2 \times z_3^3$ et de $\dfrac{z_1 \times z_2^2}{z_3^4}$.

Exercice 13:
Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé, placer les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = -2i$, $z_B = 3$, $z_C = -2$ et $z_2 = 2i$. Donner, sans calcul, les arguments de z_A, z_B, z_C et z_D.

Exercice 14:
Dans le plan complexe, on considère un nombre complexe z. Dire si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse.

1. Si z est un nombre réel négatif, alors un argument de z est π.
2. $\arg(z) = \arg(\overline{z})$.
3. Si z est un imaginaire pur, alors un argument de z est $\dfrac{\pi}{2}$.
4. $z = -3i$ a pour module -3 et pour argument $\dfrac{3\pi}{2}$.
5. Si $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ alors $\theta = \dfrac{\pi}{3}$

Exercice 15:
Donner la forme trigonométrique des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = 1 + i$
2. $z_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$
3. $z_3 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$
4. $z_4 = 1 - i$
5. $z_5 = -2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$
6. $z_6 = -\sqrt{3} - i$
7. $z_7 = -1 - \sqrt{3}i$
8. $z_8 = \dfrac{1}{5} + \dfrac{\sqrt{3}}{5}i$

Exercice 16:
Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = 2(\cos(\pi) + i\sin(\pi))$
2. $z_2 = 5\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$
3. $z_3 = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$
4. $z_4 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$

Exercice 17:
Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants :

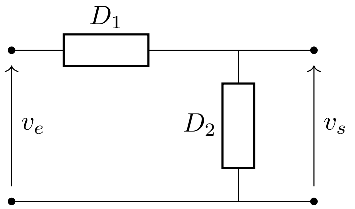
1. $|z_1| = 4$ et $\arg(z_1) = \dfrac{2\pi}{3}$
2. $|z_2| = 3$ et $\arg(z_2) = \dfrac{5\pi}{4}$
3. $|z_3| = \sqrt{2}$ et $\arg(z_3) = \dfrac{7\pi}{6}$
4. $|z_4| = 1$ et $\arg(z_4) = -\dfrac{\pi}{3}$

Exercice 18:

1. Placer les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = -2 + i$, $z_B = 1 - 2i$ et $z_C = 2 + 5i$. Conjecturer la nature du triangle ABC.
2. Calculer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
3. Déterminer leur module et un argument.
4. Prouver que le triangle ABC est rectangle en utilisant le fait que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arg(z_C - z_A) - \arg(z_B - z_A)$.

Exercice 19:
On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 1$, $z_B = i$ et $z_C = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}i$. Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ puis montrer que le triangle ABC est équilatéral.

Exercice 20:
On considère un filtre passe-bas, représenté par la figure suivante :



En régime sinusoïdal, l'impédance complexe du dipôle D_1 est $Z_1 = R$ et celle du dipôle D_2 est $Z_2 = \dfrac{1}{jC\omega}$. L'étude du filtre conduit à considérer le nombre complexe $T = \dfrac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$.

1. Montrer que $T = \dfrac{1}{1 + jRC\omega}$.
2. On suppose que $R = 1\ \Omega$, $C = 0,1$ F et $\omega = 10$ rad/s.
   (a) Montrer que $T = \dfrac{1}{1 + j}$
   (b) Donner la forme algébrique de T.
   (c) Calculer le module et un argument de T.

Exercice 21:
L'émission d'un signal par un satellite permet de caractériser la conformité d'une antenne satellite : lors de la réception du signal par l'antenne, une partie du signal est réfléchie vers le satellite. Ce phénomène est lié aux impédances de l'antenne et du câble coaxial branché sur celle-ci.
Le coefficient de réflexion, noté C_r, permet d'évaluer la perte du signal. Il est défini par $C_r = \dfrac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2}$ où z_1 est l'impédance de l'antenne et z_2 l'impédance du câble coaxial.
On donne $z_2 = R + \dfrac{1}{j2\pi Cf}$ avec $R = 50\ \Omega$, $C = 5 \times 10^{-9}$ F, $f = 1,6 \times 10^6$ Hz et $z_1 = 75\ \Omega$.

1. (a) Déterminer la forme algébrique de z_2.
   (b) Montrer que $C_r \simeq 0,17 + 0,186j$ puis calculer son module.
2. La superposition de l'onde reçue et de l'onde réfléchie crée des ondes, dites stationnaires, et des phénomènes de perturbation.
   Pour mesurer ces perturbations, on définit le rapport d'ondes stationnaires par : R.O.S=$\dfrac{1 + |C_r|}{1 - |C_r|}$.
   Pour respecter la norme, ce rapport doit être inférieur à 2. Est-ce le cas ici ?

Exercice 22:
Pour concevoir le meilleur profil d'aile, on s'intéresse à l'écoulement de l'air autour d'une surface, ce qui peut amener des calculs compliqués de trajectoires et de vitesse.
Les propriétés de physique assurent qu'on peut, connaissant l'écoulement autour d'une figure simple, par exmple un cylindre (de section circulaire), en déduire celui autour d'une figure plus élaborée, comme une aile d'avion.
La condition est que le profil de ctte aile s'obtienne à partir d'un cercle par une transformation conforme au plan.
La principale caractéristique d'une fonction conforme est de conserver les angles des vecteurs tangents entre deux courbes orientés.
Le scientifique russe Nikolaï Joukovski (1847-1921) s'intéressa à différents profils de voilure et définit une fonction conforme, appelé transformation de Joukovski.
On définit une fonction f, qui à tout nombre complexe z, associe le nombre complexe $f(z) = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$.

Partie A : Image d'un nombre complexe par f

1. Calculer $f(1)$, $f(i)$ et $f(2i)$.
2. Montrer que la forme algébrique de $f(2+i)$ est $1,2 + 0,4i$.
3. En arrondissant les parties réelles et imaginaires, déterminer les formes algébriques de $f(7)$ et de $f(8+2i)$.

Partie B : f conserve-t-elle les angles ?
Dans un repère orthonormé direct, on donne les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 2 + i$, $z_B = 7$ et $z_C = 8 + 2i$.
On pose $z_{A'} = f(z_A)$, $z_{B'} = f(z_B)$ et $z_{C'} = f(z_C)$.

1. On s'intéresse à l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
   (a) Déterminer la forme algébrique de $z_{\overrightarrow{AB}}$ et de $z_{\overrightarrow{AC}}$.
   (b) Déterminer un argument de $z_{\overrightarrow{AB}}$ et de $z_{\overrightarrow{AC}}$.
   (c) Montrer que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \simeq 0,36$ en utilisant le fait que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arg\left(z_{\overrightarrow{AC}}\right) - \arg\left(z_{\overrightarrow{AB}}\right)$.
2. (a) En vous aidant des résultats de la partie A, déterminer un argument de de $z_{\overrightarrow{A'B'}}$ et de $z_{\overrightarrow{A'C'}}$.
   (b) Montrer que $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) \simeq 0,36$.
   (c) Montrer que f est conforme.

Partie C : Construction d'un profil d'aile
On considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre A d'affixe $z_A = -1 + i$ et de rayon $\sqrt{5}$. On va tracer l'image de ce cercle par l'application f.
Soient E et F d'affixes $z_E = 1 + 2i$ et $z_F = -2 - i$.

1. Montrer que E et F appartiennent au cercle $\mathcal{C}$.
2. Déterminer les formes algébriques de $z_{E'} = f(z_E)$ et de $z_{F'} = f(z_F)$.