Chapitre 1 : Intégration

Table des matières

Contenu

- Définition de l'intégrale d'une fonction continue positive définie sur un segment $[a, b]$, comme aire sous la courbe représentative de f. Notation $\int\limits_a^b f(x)dx$
- Approximation d'une intégrale par la méthode des rectangles. Mise en relation des écritures $\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\Delta x_i$ et $\int_a^b f(x)dx$.
- Définition de l'intégrale d'une fonction négative sur [a;b] ; extension aux fonctions ne gardant pas un signe constant.
- Définition de $\int_a^b f(x)dx$ lorsque $a < b$.
- Propriétés de l'intégrale : linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles.
- Intégrale dépendant de sa borne supérieure : $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.
- Valeur moyenne d'une fonction.
- $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f.

1 Intégrale d'une fonction

1.1 Définition

Définition:
On appelle intégrale de f sur $[\ a\ ;\ b\ ]$ le nombre réel $F(b) - F(a)$ où F est une primitive quelconque de f sur I. Il est noté

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

Remarque

La variable x est dite muette, elle n'intervient pas dans le résultat. On peut donc utiliser n'importe quelle lettre.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$$

Exercice:

Calculer l'intégrale $\int_2^3 x\,dx$.

1.2 Interprétation graphique : calcul d'aire

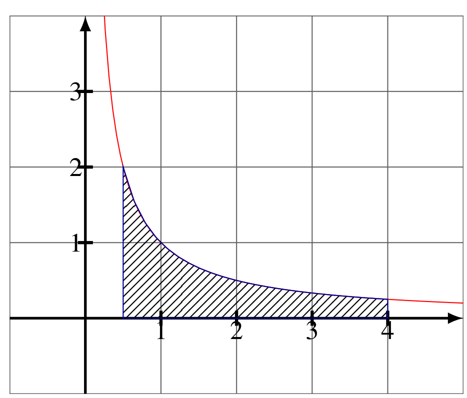
1.2.1 Aire d'une fonction positive

Définition:

Si f est une fonction positive sur $[\ a\ ;\ b\ ]$, alors $\int_a^b f(x)\,dx$ est égal à l'aire du domaine compris entre la courbe de f, l'axe des abcsisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ exprimée en unité d'aire.

Exercice:

Calculer l'aire du domaine compris entre la courbe d'équation $y = \dfrac{1}{x}$, l'axe des abcsisses, et les droites d'équations $x = \dfrac{1}{2}$ et $x = 4$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm.



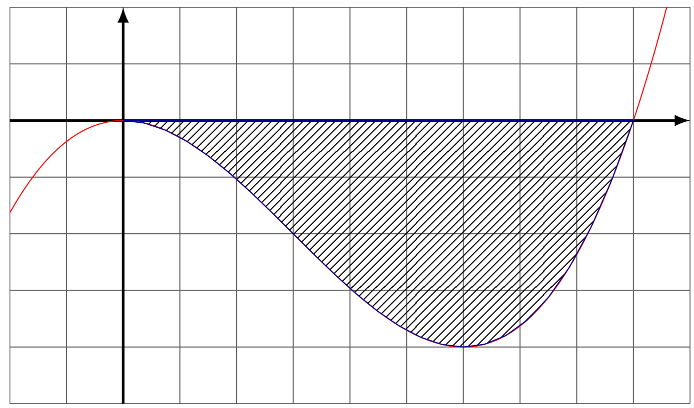
1.2.2 Aire d'une fonction négative

Définition:

Si f est une fonction négative sur $[\ a\ ;\ b\ ]$, alors $\int_a^b f(x)\ dx$ est égal à l'opposée de l'aire du domaine compris entre la courbe de f, l'axe des abcsisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ exprimée en unité d'aire.

Exercice:

Calculer l'aire du domaine compris entre la courbe d'équation $y = \dfrac{x^3}{27} - \dfrac{x^2}{3}$, l'axe des abcsisses, et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 9$ dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ d'unité graphique 1 cm.

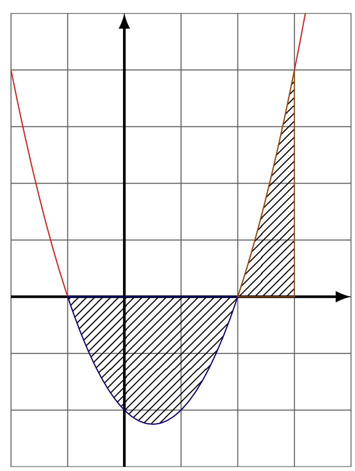


1.2.3 Aire d'une fonction quelconque : découpage d'aire

Pour calculer l'aire d'un domaine définie par une fonction changeant de signe, il faut découper l'intervalle en plusieurs intervalles sur lesquels la fonction est de signe constant.

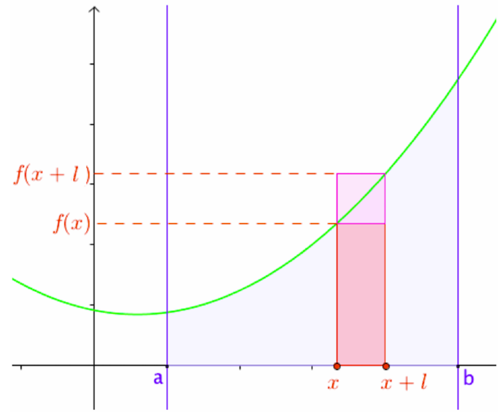
Exercice:

Calculer l'aire du domaine compris entre la courbe d'équation $y = x^2 - x - 2$, l'axe des abcsisses, et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 3$ dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ d'unité graphique 1 cm.



1.2.4 Méthode des rectangles

Soit une fonction f continue, positive et monotone sur un intervalle $[a;b]$.
On partage l'intervalle $[a;b]$ en n sous intervalles de même amplitude $l = \dfrac{b-a}{n}$.
Sur un sous-intervalle $[x;x+l]$, l'aire sous la courbe est comprise entre l'aire de deux rectangles :



- l'un de dimensions l et $f(x)$ d'aire $l \times f(x)$;
- l'autre de dimensions l et $f(x+l)$ d'aire $l \times f(x+l)$.

Sur l'intervalle $[a;b]$, l'aire sous la courbe est comprise entre la somme des n rectangles "inférieurs" et la somme des n rectangles "supérieurs". Voici un algorithme écrit en langage Python permettant d'obtenir un tel encadrement :

```python
def integrale(f,a,b,n):
    longueur = (b - a) / n
    aire_inf , aire_sup = 0 , 0
    for k in range (n):
        aire_inf = aire_inf + longueur * f(a + k * longueur )
        aire_sup = aire_sup + longueur * f(a + (k+1) * longueur )
    return aire_inf , aire_sup

aire_inf , aire_sup = integrale( lambda x: x*x , 0 , 1 , 100 )
print("{} < integrale < {}".format(aire_inf,aire_sup))
```

2 Propriétés de l'intégrale

2.1 Relation de Chasles

Propriété: *Relation de Chasles*
Soit f une fonction continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Pour tous $a, b, c \in I$ on a :

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

Exercice:

Soit f définie pour tout $x \in [-2;4]$ par $\begin{cases} x \text{ si } x \in [-2;1] \\ \dfrac{1}{x} \text{ si } x \in [1;4] \end{cases}$. Calculer $\displaystyle\int_{-2}^{4} f(x)dx$.

2.2 Linéarité

Proposition:
Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\int_a^b f(x) + g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \quad \text{et} \quad \int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$$

Exercice:

Soit f une fonction telle que $\displaystyle\int_1^3 f(x)dx = 2$. Calculer $\displaystyle\int_1^3 \frac{3}{2}f(x) + xdx$.

2.3 Inégalités

Propriété:

Soit f une fonction continue et positive sur $[a;b]$ alors on a $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq 0$

Corollaire:

Soit f, g deux fonctions continues sur $[a;b]$. Si pour tout $x \in [a;b]$, $f(x) \leq g(x)$. Alors on a $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

Exercice:

Démontrer que $\displaystyle\frac{8}{9} \leq \int_0^8 \frac{dx}{1+x} \leq 8$.

2.4 Valeur moyenne

Définition:
Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a;b]$ non trivial. On appelle valeur moyenne de f la quantité :

$$\mu_f = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Exercice:
Calculer la valeur moyenne de $f : x \mapsto (2-x)(x-1)$ sur $[-1;0]$.

3 Exercice bilan

Soit f définie pour tout $x \in [-\pi;\pi]$ par $\begin{cases} \sin\left(4x + \dfrac{4\pi}{5}\right) & \text{si } x \in [-\pi;0] \\ \cos(3x) & \text{si } x \in]0;\pi] \end{cases}$. Calculer la valeur moyenne de f sur $[-\pi;\pi]$.