

## Chapitre 2 : Fonction exponentielle

# Table des matières

|  |   |
|--|---|
| <b>Chapitre 2 : Fonction exponentielle</b> ..... | 1 |
| Axel CARPENTIER                                  |   |
| Contenu .....                                    | 2 |
| 1 Définition et caractérisation .....            | 3 |
| 2 Etude de la fonction exponentielle .....       | 3 |
| 2.1 Dérivation .....                             | 3 |
| 2.2 Limites aux bornes .....                     | 4 |
| 2.3 Variations .....                             | 4 |
| 3 Relation fonctionnelle .....                   | 4 |
| 4 Fonctions $x \mapsto e^{kx}$ .....             | 5 |
| 4.1 Dérivation .....                             | 5 |
| 4.2 Limites aux bornes .....                     | 5 |
| 4.3 Variations .....                             | 5 |
| 5 Croissances comparées .....                    | 6 |
| 6 Exercice bilan .....                           | 6 |

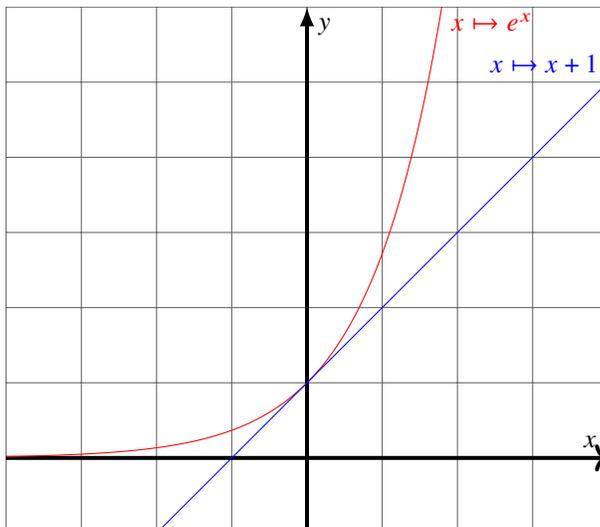
## Contenu

- Nombre  $e$  et fonction  $x \mapsto e^x$ .
- Dérivée de la fonction  $x \mapsto e^x$ .
- Dérivée de la fonction  $x \mapsto e^{kx}$  pour  $k$  réel.
- Courbe représentative.
- Limites en  $-\infty$  et  $+\infty$ .
- Croissance comparée en  $+\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^x$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{x^n}$  pour  $n$  entier.

# 1 Définition et caractérisation

**Propriété:**

Parmi toutes les fonctions  $x \mapsto a^x$ , il en existe dont la tangente à la courbe représentative au point  $(0; 1)$  a pour coefficient directeur 1.



**Définition:**

Cette fonction est la fonction exponentielle de base  $e$ , notée  $\exp$ , définie par  $\exp : x \mapsto e^x$ .  
Le réel  $e$  est environ égal à 2,718.

**! Remarque**

On a  $e^0 = 1$  et  $e^1 = e$

## 2 Etude de la fonction exponentielle

### 2.1 Dérivation

**Propriété:**

La fonction exponentielle est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $(x \mapsto e^x)' = x \mapsto e^x$ .

**Exercice:**

Pour  $x \in \mathbb{R}$ , dériver les fonctions suivantes sur leur ensemble de dérivabilité :

•  $f : x \mapsto xe^x$

•  $g : x \mapsto \frac{e^x}{x+1}$

•  $h : x \mapsto \frac{2x+1}{e^x}$

---

## 2.2 Limites aux bornes

### Propriété:

On a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

## 2.3 Variations

### Propriété:

La fonction exponentielle est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

## 3 Relation fonctionnelle

### Propriété:

Soient  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ . On a :

$$\bullet e^{x+y} = e^x \times e^y$$

$$\bullet e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$$

$$\bullet e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

$$\bullet (e^x)^n = e^{nx}$$

### ! Remarque

Cette propriété se généralise pour plusieurs facteurs.

---

### Exercice:

Simplifier les expressions suivantes :

$$\bullet A = e^3 \times e^{-4} \times e^2$$

$$\bullet B = \frac{e^{-3}}{e^2}$$

$$\bullet \forall x \in \mathbb{R}, C(x) = (e^{3x})^2$$

$$\bullet \forall x \in \mathbb{R}, D(x) = e \times (e^x)^{-4}$$

### Propriété:

Soient  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ :

$$\bullet e^a = e^b \iff a = b$$

$$\bullet e^a > e^b \iff a > b$$

### Exercice:

Résoudre les équations et les inéquations suivantes pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

$$\bullet e^x = e^6$$

$$\bullet e^x < e^{-2}$$

$$\bullet e^{x^2} - e^{-2} = 0$$

$$\bullet e^{x^2+5x} - e^6 < 0$$

## 4 Fonctions $x \mapsto e^{kx}$

### 4.1 Dérivation

#### Propriété:

La fonction  $x \mapsto e^{kx}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $(x \mapsto e^{kx})' = x \mapsto ke^{kx}$  avec  $k$  un réel quelconque.

#### Exercice:

Soit la fonction  $f : x \mapsto xe^{-3x}$  définie sur  $\mathbb{R}$ .

1. Calculer la fonction dérivée de  $f$ .
2. Etudier les variations de  $f$ .

### 4.2 Limites aux bornes

#### Propriété:

On a :

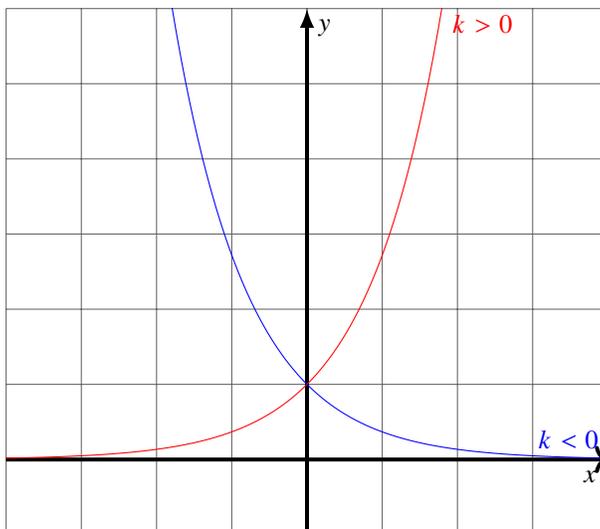
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{kx} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{kx} = 0 \quad \text{si } k > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{kx} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{kx} = +\infty \quad \text{si } k < 0$$

### 4.3 Variations

#### Propriété:

- Si  $k > 0$  : la fonction  $x \mapsto e^{kx}$  est croissante.
- Si  $k < 0$  : la fonction  $x \mapsto e^{kx}$  est décroissante.



---

Exercice:

Suite à une infection, le nombre de bactéries contenues dans un organisme en fonction du temps (en heures) peut être modélisé par la fonction  $f$  définie sur  $[0; 10]$  et telle que  $f'(t) = 0,14f(t)$ .

1. Montrer que la fonction  $f(t) = Ae^{0,14t}$  convient.
2. On suppose que  $f(0) = 50\,000$ . Calculer  $A$ .
3. Etudier les variations de  $f$  sur  $[0; 10]$ .

## 5 Croissances comparées

**Propriété:**

On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^x$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{x^n}$  pour  $n$  entier.

**! Remarque**

La propriété précédente signifie que la croissance de  $x \mapsto x^n$  est plus lente que  $x \mapsto e^x$ .

---

## 6 Exercice bilan

Soit  $f : t \mapsto -14e^{-\frac{1}{90}t} + 21$ .

1. Calculer  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$ .
2. Déterminer l'expression de  $f'(t)$ , établir son tableau de signe puis le tableau de variation complet de  $f$  sur  $\mathbb{R}^+$ .
3. Calculer  $\int_0^{90} f(t)dt$ .