Chapitre 3 : Equations différentielles

Table des matières

Chapitre 3 : Equations différentielles 1
Axel CARPENTIER
Contenu 2
1 Résolution de l'équation différentielle $y' = ay$ 3
2 Résolution de l'équation différentielle $y' = ay + b$ avec $a \neq 0$ 3
3 Exercice bilan 4

Contenu

- Notion d'équation différentielle ; notion de solution.
- Équations différentielles du type $y' = ay$; $y' = ay + b$.

1 Résolution de l'équation différentielle $y' = ay$

Définition:
L'équation $(E_0) : y' = ay$ est appelée équation différentielle linéaire homogène du premier ordre à coefficients constants.

Exemple:
$y' = 5y$ et $2y' + 9y = 0$ sont de telles équations.

Théorème:

- Les solutions de $(E_0) : y' = ay$ sont données par les fonctions $y : x \mapsto Ce^{ax}$ où $C \in \mathbb{R}$.
- Soit $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution y de (E_0) sachant que $y(x_0) = y_0$.

! Remarque

Le deuxième point définit une condition initiale. Sans cette condition initiale, il n'y pas unicité de la solution.

Exercice:
On considère l'équation différentielle $2y' + 9y = 0$.

1. Déterminer la forme générale des solutions.
2. Déterminer l'unique solution telle que $y(2) = 1$.

Propriété:
Soit y_1 et y_2 deux solutions de (E_0) et $k \in \mathbb{R}$. $y_1 + y_2$ et ky_1 sont alors également solutions de (E_0).

2 Résolution de l'équation différentielle $y' = ay + b$ avec $a \neq 0$

Définition :
L'équation $(E) : y' = ay + b$ est appelée équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants avec second membre.

Propriété:

Les solutions de (E) sont les fonctions $x \mapsto Ce^{ax} - \dfrac{b}{a}$.

Exercice:
On considère l'équation différentielle $2y' + 3y = 2$.

1. Déterminer la forme générale des solutions.
2. Déterminer l'unique solution telle que $y(2) = -\frac{1}{3}$

3 Exercice bilan

On considère l'équation différentielle $y' = -\frac{1}{90}y + \frac{7}{30}$.

1. Déterminer la forme générale des solutions.
2. Déterminer l'unique solution f telle que $f(0) = 7$.