

Chapitre 5 : Composition de fonctions

Table des matières

Chapitre 5 : Composition de fonctions	1
Axel CARPENTIER	
Contenu	2
1 Définitions	3
2 Dérivation de fonctions composées	3
2.1 Cas particuliers	3
2.2 Cas général	4
3 Primitivation de fonctions composées	5
4 Exercice bilan	5

Contenu

- Définition de la composée de deux fonctions ; notation $v \circ u$.
- Dérivée de la composée de deux fonctions : $(v \circ u)' = u' \times (v' \circ u)$.
- Expression d'une primitive de $u' f(u)$ en fonction d'une primitive de f et de la fonction u .

1 Définitions

Définition:

On appelle fonction composée de u par v la fonction notée $v \circ u$ définie par $(v \circ u)(x) = v(u(x))$.

Exemple:

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x-3}$. C'est la composée de deux fonctions u et v :

$$f : x \xrightarrow{u} x-3 \xrightarrow{v} \sqrt{x-3}$$

On a $u(x) = x-3$ et $v(x) = \sqrt{x}$ et donc f :

$$f(x) = (v \circ u)(x) = v(u(x)) = v(x-3) = \sqrt{x-3}$$

Exercice:

Soit $f : x \mapsto \frac{1}{x^2}$. Identifier la composition de deux fonctions dans la fonction f .

Exercice:

Soient $u : x \mapsto x^2 + x$ et $v : x \mapsto \frac{x}{x+1}$. Déterminer l'expression des fonctions $f = v \circ u$ et $g = u \circ v$.

2 Dérivation de fonctions composées

2.1 Cas particuliers

On a ci-dessous un récapitulatif de dérivation des fonctions usuelles :

	Fonction f	Dérivée f'
Puissance	$f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}^*$ sur $I = \mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$ sur $I = \mathbb{R}$
Inverse	$f(x) = \frac{1}{x}$ sur $I = \mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ sur $I = \mathbb{R}^*$
Cosinus	$f(x) = \cos(x)$ sur $I = \mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin(x)$ sur $I = \mathbb{R}$
Sinus	$f(x) = \sin(x)$ sur $I = \mathbb{R}$	$f'(x) = \cos(x)$ sur $I = \mathbb{R}$
Exponentielle	$f(x) = e^x$ sur $\mathbb{R}$	$f'(x) = e^x$ sur $I = \mathbb{R}$
Logarithme	$f(x) = \ln(x)$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$	$f'(x) = \frac{1}{x}$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$

On a ci-dessous un récapitulatif d'opérations de dérivation :

Fonction	Dérivée
$ku, k \in \mathbb{R}$	ku'
$u + v$	$u' + v'$
uv	$u'v + uv'$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
$u^n, n \in \mathbb{N}^*$	$nu'u^{n-1}$
$\cos(u)$	$-u' \sin(u)$
$\sin(u)$	$u' \cos(u)$
e^u	$u' e^u$
$\ln(u)$	$\frac{u'}{u}$

Exercice:

Soit $f : x \mapsto 1 - \frac{4x - 3}{x^2 + 1}$ définie sur $\mathbb{R}$. Etablir le tableau de variations de f .

2.2 Cas général

Propriété:

On a :

$$(v \circ u)'(x) = u'(x) \times (v' \circ u)(x)$$

.

Exercice:

Déterminer la fonction dérivée des fonctions suivantes :

• $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 3x - 10}$

• $g : x \mapsto \left(\frac{3x + 2}{x - 3} \right)^3$

• $h : x \mapsto \frac{x^2 - 6}{2x + 5}$

3 Primitivation de fonctions composées

On a ci-dessous un récapitulatif des primitives des fonctions usuelles :

	Fonction f	Primitive F
Constante	$f(x) = a, a \in \mathbb{R} \text{ sur } I = \mathbb{R}$	$F(x) = ax + k \text{ sur } I = \mathbb{R}$
Puissance	$f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}^* \text{ sur } I = \mathbb{R}$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k \text{ sur } I = \mathbb{R}$
Cosinus	$f(x) = \cos(x) \text{ sur } I = \mathbb{R}$	$F(x) = \sin(x) + k \text{ sur } I = \mathbb{R}$
Sinus	$f(x) = \sin(x) \text{ sur } I = \mathbb{R}$	$F(x) = -\cos(x) + k \text{ sur } I = \mathbb{R}$
Sinusoïde	$f(x) = A \cos(\omega x + \phi) \text{ sur } I = \mathbb{R}$	$F(x) = \frac{A}{\omega} \sin(\omega x + \phi) + k \text{ sur } I = \mathbb{R}$

On a ci-dessous un récapitulatif d'opérations de dérivation :

Fonction	Primitive
$f(ax + b)$	$\frac{1}{a} F(ax + b)$ où F est une primitive de f .
$u' u^n$	$\frac{1}{n+1} u^{n+1}$
$u' e^u$	e^u
$\frac{u'}{u}$	$\ln(u)$
$u' \cos(u)$	$\sin(u)$
$u' \sin(u)$	$-\cos(u)$

Exercice :

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

- $f : x \mapsto (2x - 5)(x^2 - 5x + 4)^2$
- $g : x \mapsto x e^{x^2}$
- $h : x \mapsto \cos(2x) - 3 \sin(3x - 1)$

4 Exercice bilan

Soit $f : x \mapsto (2x - 6)(x^2 - 6x + 7)^{17}$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminer l'expression de $f'(x)$.
2. Calculer $\int_{-2}^3 f(x) dx$.