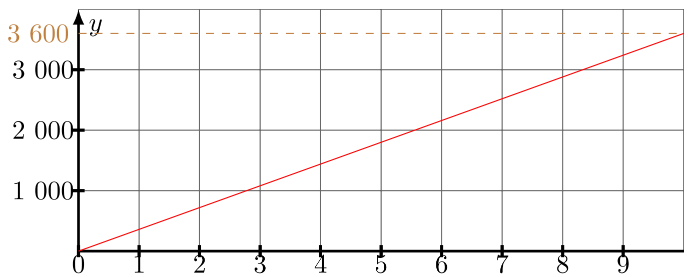
1 Intégration

1.1 Compétences Attendues

- Calculer l'intégrale d'une fonction sur un intervalle $[a;b]$.
- Calculer la valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle $[a;b]$.
- Calculer une aire sous une courbe ou entre deux courbes.

1.2 Exercices

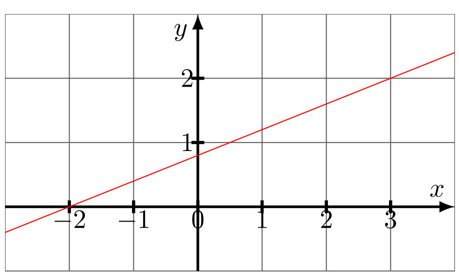
Exercice 1:
Une fusée subit une accélération constante les 10 premières secondes de sa poussée, pour atteindre une vitesse de 1 000 km/h. Sa vitesse $v(t)$ atteinte au bout de t (en seconde) peut être lue sur le graphique ci-dessous.



On admet que la distance parcourue au cours des 10 premières secondes est égale à $d = \int_0^{10} v(t)dt$. Calculer cette distance.

Exercice 2:
La représentation graphique d'une fonction f est une droite passant par les points A et B de coordonnées respectives $(-2;0)$ et $(3;2)$.

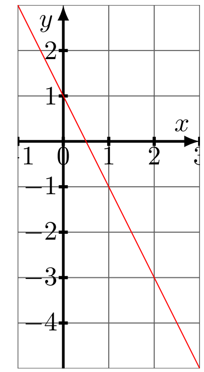
Calculer $\int_{-1}^{3} f(x)dx$.



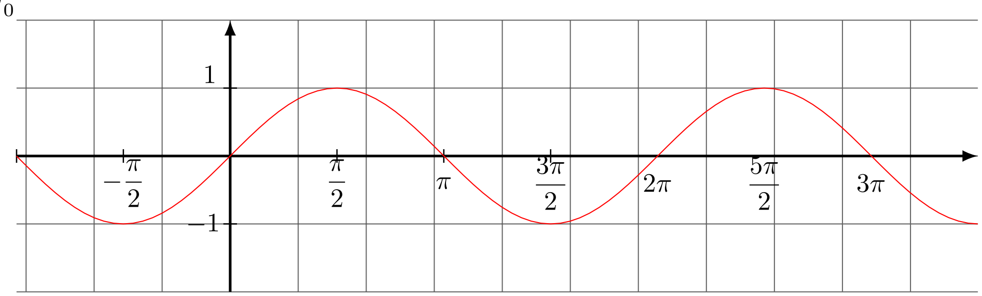
Exercice 3:

Soit g la fonction affine définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $g(x) = -2x + 1$.

1. Déterminer le signe de $g(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
2. Calculer $\int_{-1}^{3} g(x)dx$.



Exercice 4:
A partir de la représentation graphique de la fonction sinus ci-dessous, déterminer le signe des intégrales $\int_0^{\frac{5\pi}{2}} \sin(t)dt$ et $\int_{-2}^{7} \sin(t)dt$. Pour quelles valeurs du réel α a-t-on $\int_0^{\alpha} \sin(t)dt = 0$?



Exercice 5:
Montrer que pour tout $x \in [0;1]$ on a :

$$x^2 \leq x \quad \text{et} \quad x \leq \sqrt{x}$$

En déduire que

$$\int_0^1 x^2 dx \leq \frac{1}{2} \leq \int_0^1 \sqrt{x} dx$$

Exercice 6:
Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x \sin^2(2x)$.

1. Montrer que, pour tout $x \geq 0$, on a $0 \leq f(x) \leq x$.
2. En déduire un encadrement de l'intégrale $\int_0^{10\pi} f(x)dx$.

Exercice 7:
Soit les intégrales :

$$I = \int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx$$

On admet que $J = \frac{\pi}{4}$.

1. Montrer que $I + J = \int_0^1 1dx$.
2. En déduire la valeur de I.

Exercice 8:
Soit les intégrales :

$$C = \int_0^\pi \cos^2(x)dx \quad \text{et} \quad S = \int_0^\pi \sin^2(x)dx$$

1. On admet que $\int_0^\pi \cos^2(x) - \sin^2(x)dx = 0$. En déduire la valeur de $C - S$.
2. Montrer que $C + S = \pi$.
3. En déduire les valeurs de C et de S.

Exercice 9:
Soit une fonction f telle que $\int_0^2 f(x)dx = 2$. Montrer que la valeur moyenne de la fonction $x \mapsto f(x) - 1$ est nulle sur l'intervalle $[0; 2]$.

Exercice 10:
Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_{-5}^7 \sqrt{2}dx$
2. $\int_{-2}^4 (x^2 + 3x + 4)dx$
3. $\int_{-1}^1 (x^4 - x^2 + x - 1)dx$
4. $\int_{-2}^2 (8x^5 + 5x^3 + 2x)dx$
5. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos(2x) - 3\sin(5x))dx$
6. $\int_{-1}^1 (x^{17} + 2x^9 + x - 1)dx$
7. $\int_{-2}^2 (2x^2 - 3x^8 - 7x)dx$
8. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} -\frac{1}{3}\sin\left(-6x + \frac{4\pi}{5}\right)dx$

Exercice 11:
Soit f la fonction définie pour tout réel x par $\begin{cases} x^2 + x & \text{si} \quad x < -1 \\ 2x^3 - x + 1 & \text{si} \quad x \geq -1 \end{cases}$.

Calculer $\int_{-4}^1 f(t)dt$.

Exercice 12:
Soient f, g deux fonctions continues sur $[1; 2]$ telles que $\int_1^2 f(x)dx = 2$ et $\int_1^2 g(x)dx = -3$.

1. Calculer $\int_1^2 (5f(x) - g(x))dx$
2. Calculer $\int_1^2 \left(\frac{1}{2}f(x) + \frac{2}{3}g(x)\right)dx$

Exercice 13:
Une entreprise du bâtiment est chargée de construire des arches de béton qu'elle réalise en deux parties. Chaque partie est assimilée à une plaque homogène dont le contour est une parabole d'équation $y = f(x)$ avec $f(x) = x - 4x^2$ pour $x \in [0; 2]$.
Pour lever ces plaques à l'aide d'une grue, une fixation doit être prévue et placée de façon à maintenir un équilibre. On admet que cette position d'équilibre est telle que l'abscisse du point d'ancrage de la grue vérifie $x_A = \frac{1}{S}\int_0^2 xf(x)dx$ où S est l'aire de la surface de la plaque. Quelle est l'abscisse de ce point d'ancrage ?

Exercice 14:

1. On souhaite calculer l'aire du domaine compris entre la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto x\sqrt{x}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 2$.On admet qu'une primitive de la fonction f donnée par $F : x \mapsto \frac{2}{5}\sqrt{x} \times x^2$. Calculer la valeur exacte de l'aire cherchée.
2. La surface obetnue par la révolution de la courbe précédente autour de l'axe (Ox) a la forme d'une "trompette". On admet que le volume de l'objet délimité par cette surface est :
$$V = 2\pi \int_0^2 f(x)^2 dx$$
Quelle est la valeur exacte de ce volume V ?

Exercice 15:
Soit ϕ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ par

$$\phi(x) = \int_0^x (t-1)10^{-t}dt$$

1. Justifier que $\phi'(x) = (x-1)10^{-x}$.

2. En déduire le sens de variation de ϕ sur $[0;+\infty[$.

3. Quelle est la valeur de $\phi(0)$? Dresser le tableau de signes de la fonction ϕ sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 16:
Une bille est lancée du sol, verticalement vers le haut, avec une vitesse initiale $v_0 = 5$ m.s^{-1}. On admet qu'à chaque instant t, sa vitesse vérifie

$$v(t) = -gt + v_0$$

La hauteur $h(t)$ à laquelle se trouve cette bille à l'instant t_0 est égale à

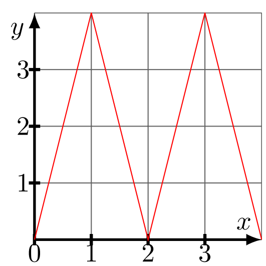
$$h(t_0) = \int_0^{t_0} v(t)dt$$

1. Déterminer une primitive de v et donner une expression de $h(t_0)$ en fonction de t_0.

2. Quelle est la hauteur maximale atteinte par cette bille ?

3. Au bout de combien de temps retombera-t-elle au sol ?

Exercice 17:
Un dipôle est soumis à une tension périodique $u(t)$ (en V) au temps t (en ms). Cette tension triangulaire est représentée ci-dessous.



1. Lire sur le graphique la période T de cette fonction u.

2. Déterminer $\displaystyle\int_0^2 u(t)dt$ à partir du graphique.

3. En déduire une valeur de la tension moyenne aux bornes de ce dipôle sur une période.

4. On admet maintenant que sur l'intervalle $[0;2]$ on a :

$$u(t) = \begin{cases} 4t & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ -4t+8 & \text{si } 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

En utilisant la relation de Chasles, retrouver par le calculer la tension moyenne déterminée à la question précédente.

5. On appelle valeur efficace de la tension $u(t)$ le réel $U = \sqrt{\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^2 u(t)^2 dt}$. Calculer U.

Exercice 18:
Soit $f : x \mapsto 2 + \cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$ définie sur $\left[0; \dfrac{5\pi}{3}\right]$.

1. Soit g la fonction définie par $g(x) = f(x)^2$. Exprimer $g(x)$ en fonction de x.

2. On admet que, pour tout réel a, $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$.
En déduire que

$$\left[\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right]^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right)$$

3. Déterminer alors une primitive G de g sur l'intervalle $\left[0; \dfrac{5\pi}{3}\right]$.

4. Calculer la valeur exacte de l'intégrale :

$$I = \int_0^{\frac{5\pi}{3}} \left[\frac{9}{2} + 4\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}\cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right)\right] dx$$

5. Calculer la valeur exacte de

$$V = \pi \int_0^{\frac{5\pi}{3}} f(x)^2 dx$$

Exercice 19:
Un ressort à spires est attaché à son extrémité fixe A. On attache un mobile à son autre extrémité M.
On suppose que l'accélération $a(t)$ du mobile au temps t vérifie

$$a(t) = \frac{3}{4}\sin(3t) + \sin(t)$$

La vitesse $v(t_0)$ du mobile à l'instant t_0 vaut :

$$v(t_0) = \int_0^{t_0} a(t)dt$$

Déterminer une primitive de la fonction $t \mapsto a(t)$ puis en déduire une expression de $v(t_0)$ en fonction de t_0.