1 Fonction exponentielle

1.1 Compétences Attendues

- Transformer une expression en utilisant les propriétés algébriques de la fonction exponentielle.
- Étudier les variations de fonctions somme, produit ou quotient de fonctions exponentielles (du type $x \mapsto e^{kx}$ pour k réel) et de fonctions polynômes.
- Déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de fonctions somme, produit ou quotient de fonctions exponentielles et de fonctions polynômes.

1.2 Exercices

Exercice 1:
Simplifier les expressions suivantes :

1. $\sqrt{\dfrac{e \times e^{-5}}{e^2}}$
2. $\dfrac{e^{1,4} \times e^{-1}}{e^{1,2}}$
3. $\sqrt{\dfrac{e \times e^2}{e^{-7}}}$
4. $e^{1,5} \times (e^{-0,5})^5$

Exercice 2:
Soit $x \in \mathbb{R}$, simplifier les expressions suivantes :

1. $\dfrac{e^{x^2} \times (e^x)^2}{e^{(x+1)^2}}$
2. $\dfrac{e^{3+x}}{e^{3-x}}$
3. $\dfrac{e^{2x+4} \times e^{-x+1}}{e^{x+5}}$

Exercice 3:
Soit $x \in \mathbb{R}$, résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $e^{-7x} \times e^{2x+8} = e^{-x+3}$
2. $\dfrac{e^{3x-1}}{e^{-5x+4}} = 1$
3. $(e^{3x})^2 \times e^{x+5} = 1$
4. $e^{1-x} - e^{2x} = 0$

Exercice 4:
Soit $x \in \mathbb{R}$, résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $e^x(e^x - 1) = 0$
2. $(e^x + 8)(e^x - e) = 0$
3. $xe^{2x+1} = x$
4. $(e^{-3x+6} - e)(e^{x^2} - 1) = 0$

Exercice 5:
Soit $x \in \mathbb{R}$, résoudre sur $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $e^{6x+5} \geq 1$
2. $e^{-3x+5} > e$
3. $e^{-3x-1} \leq (e^4)^2$
4. $\dfrac{e^x \times (e^{-5})^3}{(e^x)^2} \leq 1$

Exercice 6:
Calculer les dérivées des fonctions suivantes dérivables sur $\mathbb{R}$.

1. $f_1 : x \mapsto e^{3x}(x+2)$
2. $f_2 : x \mapsto e^{-x} - \dfrac{1}{x}$
3. $f_3 : x \mapsto 2e^{-x} + \cos(3x)$
4. $f_4 : x \mapsto \dfrac{5}{e^{4x}} + x^4$
5. $f_5 : x \mapsto e^{2x}(-3x+2)$
6. $f_6 : x \mapsto \dfrac{5x-4}{e^{4x}}$
7. $f_7 : x \mapsto e^{\frac{x}{3}} + x^4 - 2x^3$
8. $f_8 : x \mapsto 4e^{3x}\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$
9. $f_9 : x \mapsto e^{-2x}\sin\left(3x - \dfrac{\pi}{6}\right)$
10. $f_{10} : x \mapsto 10e^{2x}\cos\left(4x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

Exercice 7:
Pour chaque fonction f, déterminer les limites en $\pm\infty$, déterminer f' en étudiant son signe puis dresser le tableau de f.

1. $f(x)(-x+5)e^x$
2. $f(x) = \dfrac{x^2}{e^{-x}}$
3. $f(x) = \dfrac{-2x+7}{e^{2x}}$
4. $f(x) = \dfrac{e^{3x}}{9x+1}$

Exercice 8:
On considère la fonction $f : x \mapsto e^x - \dfrac{1}{x}$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

1. Déterminer une expression de la dérivée de f.
2. Donner le tableau de signes de cette dérivée.
3. En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^*$

Exercice 9:
On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{x+1}$ définie et dérivable sur $]-1;+\infty[$.

1. Donner le tableau de signes de f.

2. Dresser le tableau de variations de f après avoir calculé sa dérivée.

Exercice 10:
On considère la fonction $f : x \mapsto e^x - x + 1$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Etablir le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11:
On considère la fonction $g : x \mapsto x^2 e^x$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Etablir le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12:
On considère les fonctions $f : x \mapsto e^{2x}$ et $g : x \mapsto e^{-3x}$.

1. Etablir les tableaux de variations des fonctions f et g.
2. Résoudre pour tout $x \in \mathbb{R}$ l'inéquation $g(x) > f(x)$.

Exercice 13:
On considère la fonction $f : x \mapsto (-x^2 + 3x - 1)e^{-x}$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Etablir le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 14:
On considère la fonction $g : x \mapsto \dfrac{e^{12x}}{x^3}$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $g'(x) = \dfrac{(12x-3)e^{12x}}{x^4}$.
2. En déduire le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 15:

1. On considère la fonction $g : x \mapsto (x-2)e^{-2x} + 3$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Etablir le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$.
2. Le bénéfice (en millions d'euros) d'une grande entreprise en fonction de la quantité x (en tonnes) de métal vendue est donné par la fonction g.
   (a) Quelle quantité minimale doit vendre l'entreprise pour réaliser un bénéfice ?
   (b) Quel est le bénéfice maximal ? Pour quelle quantité de métal vendu ?

Exercice 16:
Dans une usine, un four cuit des céramiques à la température de 1000°C. A la fin de la cuisson, il est atteint et il refroidit. On s'intéresse à la phase de refroidissement du four, qui débute dès l'instant où il est éteint. La température du four est exprimée en degré Celsius (°C).
La porte du four peut être ouverte sans risque pour les céramiques dès que sa température est inférieure à 70°C ; sinon les céramiques peuvent se fissurer, voire se casser.
On note t le temps (en h) écoulé depuis l'instant où le four a été éteint. La température du four (en °C) à l'instant t est donnée par la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f : x \mapsto ae^{-\frac{t}{5}} + b$ où $a, b \in \mathbb{R}$.
On admet que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$: $f'(t) + \dfrac{1}{5}f(t) = 4$.

1. Déterminer les valeurs de a et b sachant qu'initialement la température du four est de 1000°C.
2. Au bout de combien d'heures peut-on ouvrir la porte du four en toute sécurité ?

Exercice 17:
La fonction $f : x \mapsto \dfrac{2+x}{e^x}$, définie sur $\mathbb{R}$, est la dérivée d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ de la forme $x \mapsto \dfrac{ax+b}{e^x}$, $a, b \in \mathbb{R}$. Déterminer les valeurs de a et de b.

Exercice 18:
On définit sur $\mathbb{R}^*$ la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{e^x - 1}$. Etablir le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 19:
Un condensateur de capacité C (en F) est relié à un conducteur ohmique de résistance R (en Ω). La tension (en V) aux bornes du condensateur est donnée en fonction du temps t (en s) par :

$$u(t) = 25e^{-\frac{t}{RC}}$$

1. (a) Calculer $u(0)$, la charge initiale du condensateur.
   (b) S'agit-il de la charge ou de la décharge du condensateur ?
2. On prend $R = 500\ \Omega$ et $C = 10\ \mu$F.
   (a) Calculer la tension aux bornes du condensateur au bout d'un centième de seconde. Arrondir à 0,1 près.
   (b) Au bout de combien de temps, en millième de seconde près, le condensateur aura-t-il perdu 95% de sa charge ?

Exercice 20:
En 1960, Willard Frank Libby a reçu le prix Nobel de chimie pour le développement d'une technique de datation basée sur le carbone 14. Un organisme vivant contient la même proportion de carbone 14 que l'atmosphère, mais à sa mort, cette proportion diminue avec le temps selon la loi :

$$P(t) = e^{-1{,}21 \times 10^{-4} t}$$

où t est le nombre d'années écoulées depuis la mort. On peut estimer l'âge d'un organisme en mesurant cette proportion.

1. On dit que la demi-vie du carbone 14 est de 5 734 ans. Calculer la proportion de carbone 14 restante au bout de 5 734 ans.
2. Un fossile a perdu 80% de sa teneur en carbone 14. Vérifier que ce fossile date d'environ 13 300 ans.

Exercice 21:
Une entreprise fabrique des pièces de fonte graphique sphéroïdal GS pour l'industrie automobile. Coulées dans des moules de sable, ces pièces sortent du four à 1 400°C et sont entreposées dans un local à 30°C. Elles peuvent être démoulées dès que leur température est inférieure à 650°C. La température (en °C) d'une pièce de fonte est une fonction du temps t (en h) depuis sa sortie du four. On admet qu'elle est définie sur $[0;+\infty[$ par $f(t) = Ke^{-0,065t} + 30$ où K est une constante à déterminer.

1. (a) Donner $f(0)$ et déterminer la valeur de K.
   (b) Etudier le sens de variation de la fonction f sur $[0;+\infty[$.
   (c) Pourquoi ce résultat était-il prévisible ?
2. La pièce de fonte peut-elle être démoulée après avoir été entreposée 5 heures dans le local ?
3. (a) Déterminer au bout de combien de temps au minimum la pièce pourra être démoulée. Arrondir le résultat à la minute près.
   (b) Pour éviter la fragilisation de la porte, il est préférable de ne pas démouler la pièce avant que sa température ait atteint 325°C. Dans ce cas, faudra-t-il attendre exactement deux fois plus de temps que pour un démoulage à 650°C ? Justifier la réponse.

Exercice 22:
Vérifier que la fonction F est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f.

1. $f : x \mapsto xe^x$ et $F : x \mapsto e^x(x-1)$
2. $f : x \mapsto \dfrac{x}{e^x}$ et $F : x \mapsto -e^{-x}(x+1)$
3. $f : x \mapsto e^x \sin(x)$ et $F : x \mapsto e^x(\sin(x) - \cos(x))$
4. $f : x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{e^x}$ et $F : x \mapsto \dfrac{e^{-x}}{2}(\cos(x) - \sin(x))$

Exercice 23:
Calculer la valeur exacte de chaque intégrale, puis donner une valeur approchée à 0,01 près.

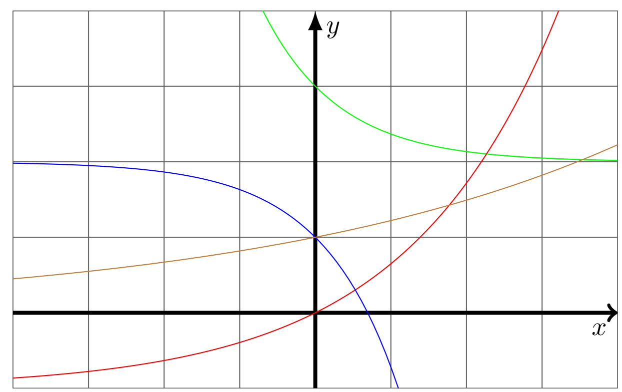
1. $\displaystyle\int_0^3 e^x dx$
2. $\displaystyle\int_0^4 e^{0,25x} dx$
3. $\displaystyle\int_0^2 e^{2x} dx$
4. $\displaystyle\int_0^{10} (e^{-0,1x} + 2x - 3) dx$

Exercice 24:
Lors de la décharge d'un condensateur, la puissance fournie (en W) est donnée en fonction du temps (en s) par :

$$P(t) = \frac{(240e^{-8t})^2}{1\ 000}$$

Calculer la puissance moyenne lors d'une décharge durant un dixième de seconde.

Exercice 25:
Associer chaque fonction à sa corube en raisonnant sur les limites.



- $f(x) = e^{-x} + 2$
- $g(x) = e^{0,5x} - 1$
- $h(x) = -e^x + 2$
- $k(x) = e^{0,2x}$

Exercice 26:
La tension (en V) aux bornes d'un condensateur lors de sa charge est donnée en fonction du temps t (en s) par :

$$u(t) = 240(1 - e^{-40t})$$

1. (a) Déterminer $\lim\limits_{t\to+\infty} 240e^{-40t}$.

(b) Quelle semble être la charge maximale du condensateur ?

2. Calculer la fonction dérivée u' de u puis en déduire le tableau de variations de u sur $[0; +\infty[$.

3. Au bout de combien de temps t_c, à un millième de seconde près, le condensateur sera-t-il chargé à 99% ?

4. Déterminer la charge moyenne du condensateur au cours de l'intervalle de temps $[0; t_c]$. Arrondir à l'unité.

Exercice 27:
Un robot suit un mouvement rectiligne. Sa position (en m) est donnée par son abscisse x en fonction du temps t (en s) par :

$$x(t) = 5(1 - e^{-t})$$

On admet que la vitesse du robot est donnée par la fonction dérivée x'.

1. Déterminer la vitesse initiale du robot et sa vitesse à l'instant $t = 6$. Donner la valeur exacte et une valeur approchée à $0,0001$ près.

2. Quelle est approximativement la distance maximale que va parcourir le robot ?

Exercice 28:
En chimie, on utilise le modèle de Verhulst pour des réactions autocatalytiques, dans lesquelles l'augmentation des individus touchés est proportionnelle à la fois au nombre d'individus déjà touchés et au nombre d'individus qui peuvent encore être touchés. Lors de la réaction des ions permanganates MnO_4^- avec l'acide oxalique $C_2H_2O_4$ autocatalysé par les ions Mn^{2+}, la concentration d'ions Mn^{2+} (en mmol/L) dans la solution est modélisée en fonction du temps t (en min) par :

$$c(t) = \frac{2,001}{1 + 2\ 000e^{-2,4t}}$$

1. Quelle est la concentration initiale d'ions Mn^{2+} dans la solution ?

2. Calculer la fonction dérivée $c'(t)$, étudier son signe et en déduire les variations de c sur $[0; +\infty[$.

3. Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} c(t)$ et interpréter ce résultat.

4. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, au bout de combien de temps, à la seconde près, la concentration d'ions Mn^{2+} atteidnra 2 mmol/L.

Exercice 29:
On pose une bille à la surface de l'eau.

1. La bille s'enfonce et sa vitesse (en m/s) au bout de t secondes est :

$$v(t) = 0,8(1 - e^{-10t})$$

   (a) Calculer $v(0)$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} v(t)$.

   (b) Calculer la fonction dérivée de v, étudier son signe et dresser le tableau de variation de v.

2. On admet que la distance parcourue par la bille en x secondes est égale à $\int_0^x v(t)dt$.

   Calculer la distance parcourue par la bille en 10 secondes.

Exercice 30:
Le nombre d'élèves touchés par une épidémie de grippe dans un lycée est modélisé par $f(t) = \dfrac{440}{2 + 20e^{-t}}$ où t est le temps (en jours) après la découverte de l'épidémie.

1. (a) Combien d'élèves étaient déjà infecté le jour où l'épidémie a été repérée ?
   (b) Déterminer la limite de f en $+\infty$. Interpréter ce résultat.
   (c) Déterminer f', étudier son signe puis établir le tableau de variations de f.

2. (a) Combien y-a-t-il d'élèves touchés après 2 jours d'épidémie.
   (b) Au bout de combien de temps le nombre d'élèves malades est maximal ?