1 Composition de fonctions

1.1 Compétences Attendues

- Identifier la composée de deux fonctions dans une expression simple.
- Calculer la dérivée des fonctions composées usuelles :
  - $x \mapsto (u(x))^n$
  - $x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto \sin(x)$
  - $x \mapsto e^{u(x)}$ et $x \mapsto \ln(u(x))$
- Calculer des primitives de fonctions de la forme :
  - $x \mapsto f(ax+b)$ connaissant une primitive de f.
  - $u'u^n$ et $\dfrac{u'}{u}$
  - $u'e^u$, $u'\cos(u)$ et $u'\sin(u)$

1.2 Exercices

Exercice 1:
Soit $f : x \mapsto 2x+1$. Déterminer l'expression développée de :

1. $g(x) = f(x-3)$
2. $h(x) = f(3x)$

Exercice 2: Soit $f : x \mapsto 1-3x$. Déterminer l'expression développée de :

1. $g(x) = f(-3x+2)$
2. $h(x) = f\left(\dfrac{1}{3}x + \dfrac{2}{3}\right)$

Exercice 3:
Soit $f : x \mapsto 4x+1$ et $g : x \mapsto -2x-1$. Déterminer l'expression développée de :

1. $(f \circ g)(x)$
2. $(g \circ f)(x)$
3. $(f \circ f)(x)$
4. $(g \circ g)(x)$

Exercice 4:
Déterminer la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f_1 : x \mapsto (0,4x+1)^5$
2. $f_2 : x \mapsto (x^2+x+1)^4$
3. $f_3 : x \mapsto e^{-x+2}$
4. $f_4 : x \mapsto e^{2,1x}$
5. $f_5 : x \mapsto \cos\left(\dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{6}\right)$

Exercice 5:
Déterminer la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f_1 : x \mapsto \cos(x^2+x)$
2. $f_2 : x \mapsto \cos\left(100\pi x + \dfrac{\pi}{7}\right)$
3. $f_3 : x \mapsto \sin\left(\dfrac{2\pi x}{3} - \dfrac{\pi}{4}\right)$
4. $f_4 : x \mapsto \ln\left(\dfrac{x}{2} - 1\right)$
5. $f_5 : x \mapsto \ln(x^4+1)$

Exercice 6:
Déterminer une primitive des fonctions suivantes de la forme $f = u'u^n$:

1. $f_1 : x \mapsto 3(3x+2)^3$
2. $f_2 : x \mapsto (2x+1)(x^2+x+3)^2$
3. $f_3 : x \mapsto x(x^2+1)^{-2}$
4. $f_4 : x \mapsto \dfrac{1}{(3x-1)^4}$
5. $f_5 : x \mapsto (2-7x)^{-7}$

Exercice 7:
Déterminer une primitive des fonctions suivantes de la forme $f = u'u^n$:

1. $f_1 : x \mapsto \cos(x)\sin^2(x)$
2. $f_2 : x \mapsto \sin(x)\cos^3(x)$
3. $f_3 : x \mapsto \sin(x)\cos^{-2}(x)$
4. $f_4 : x \mapsto \dfrac{-8x}{(x^2-1)^2}$
5. $f_5 : x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$

Exercice 8:
Déterminer une primitive des fonctions suivantes de la forme $f = \dfrac{u'}{u}$:

1. $f_1 : x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$
2. $f_2 : x \mapsto \dfrac{1}{2x+1}$
3. $f_3 : x \mapsto \dfrac{x}{x^2+1}$

Exercice 9:
Déterminer une primitive des fonctions suivantes de la forme $f = u'e^u$:

1. $f_1 : x \mapsto 2e^{0,2x}$
2. $f_2 : x \mapsto e^{-x}$
3. $f_3 : x \mapsto xe^{x^2+4}$

Exercice 10:
Soit $f : x \mapsto 3-x$ et $g : x \mapsto x^2+x-1$. Déterminer l'expression développée de :

1. $(f \circ g)(x)$
2. $(g \circ f)(x)$
3. $(f \circ f)(x)$

Exercice 11:
Soit $f : x \mapsto \dfrac{5x+3}{x-5}$ et $g : x \mapsto x^2 - 5x + 5$. Déterminer l'expression développée de :

1. $(f \circ g)(x)$
2. $(g \circ f)(x)$
3. $(f \circ f)(x)$

Exercice 12:
Déterminer la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f_1 : x \mapsto \dfrac{5}{(2x^2 - 3x - 5)^3}$
2. $f_2 : x \mapsto \dfrac{-2}{(2x+1)^2}$
3. $f_3 : x \mapsto \left(\dfrac{x}{x-1}\right)^4$
4. $f_4 : x \mapsto \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^3$
5. $f_5 : x \mapsto \cos^2(3x)$

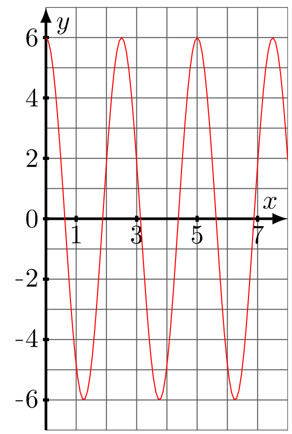
Exercice 13:
Déterminer la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f_1 : x \mapsto \sin^2\left(2\pi x + \dfrac{\pi}{4}\right)$
2. $f_2 : x \mapsto e^{-0,3x}\cos(2x)$
3. $f_3 : x \mapsto \dfrac{e^{1,2x} - 1}{e^{1,2x} + 1}$
4. $f_4 : x \mapsto \ln^2(x)$
5. $f_5 : x \mapsto \dfrac{\ln(x^2)}{x^2}$

Exercice 14:
La portée (en mètre) R d'un projectile lancé à une vitesse initiale v_0 (en m/s) et avec un angle α par rapport à l'horizontale est donné par $P = \dfrac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}$ avec $g = 9,81$ m/s^2. Le projectile est lancé avec une vitesse initiale de 30 m/s.

1. (a) Démontrer que $f(\alpha) = 91,7\sin(2\alpha)$ est une approximation de la portée de ce pojectile.
   (b) En utilisant cette approximation, calculer la portée si on lance ce pojectile avec un angle de $\dfrac{\pi}{6}$ rad.
2. (a) Calculer $f'(\alpha)$.
   (b) Déterminer le signe de $f'(\alpha)$ sur $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.
   (c) Dresser le tableau de variations de f.
3. Quel angle faut-il choisir pour avoir une portée maximale ? Quelle est cette portée ?

Exercice 15:
Un mobile sphérique se déplace sans frottement le long d'un axe horizontal. Il est lié à l'extrémité d'un ressort, l'autre extrémité du ressort étant fixe.
La position de ce mobile est donnée par la fonction $x : t \mapsto x(t)$ où t est le temps et $x(t)$ l'abscisse du centrer du mobile sur l'axe gradué. La représentation graphique de la fonction x est donnée ci-dessous :

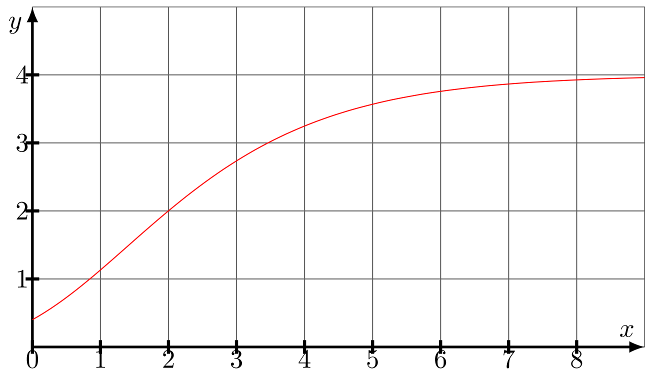


1. Utiliser le graphique pour répondre aux questions suivantes.
   (a) Quels sont le maximum x_{max} et x_{min} de la fonction x ?
   (b) Quelle est l'amplitude du mouvement de ce mobile ?
   (c) Quelle est la période p du mouvement ?
2. On admet que :
$$x(t) = x_{max}\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$$
   (a) En utilisant les résultats précédents, démontrer que :
$$x(t) = 6\cos\left(\frac{4\pi}{5}t\right)$$
   (b) Déterminer la position du mobile au bout de 6 secondes.
3. La vitesse instantanée v (en cm/s) est donnée par $v(t) = x'(t)$.
   (a) Déterminer l'expression de $v(t)$.
   (b) Déterminer la vitesse du mobile au bout de 6 secondes.
   (c) Déterminer, lorsque t décrit l'intervalle $[0; 8]$, les valeurs de t pour lesquelles la vitesse est nulle. Ces résultats étaient-ils prévisibles ?
4. (a) Déterminer x'' la dérivée de x'.
   (b) En déduire que la fonction x est une solution de l'équation différentielle :
$$y'' + \left(\frac{4\pi}{5}\right)^2 y = 0$$

Exercice 16:

1. (a) Soit $u(t) = -2,3e^{-0,6t}$ et $v(t) = 4e^t$. Déterminer u' et v'.
   (b) Soit $f : t \mapsto (v \circ u)(t)$.
      i. Donner l'expression de f en fonction de t.
      ii. En utilisant les résultats précédents, déterminer la dérivée f' de f.
      iii. En déduire le sens de variation de f sur $[0; +\infty[$.

2. On modélise la croissance d'un plant par la fonction f précédente où t est la durée (en année) après la plantation et $f(t)$ la hauteur (en mètre). La représentation graphique de la fonction f est donnée ci-dessous.



   (a) i. En utilisant le graphique, donner la hauteur du plant au moment où il a été mis en terre.
       ii. Quel calcul permet de retrouver ce résultat ? Effectuer ce calcul.
   (b) i. Déterminer graphiquement $\lim_{t \to +\infty} f(t)$.
       ii. Interpréter ce résultat.

Exercice 17:
Soit f une fonction définie et dérivable en x_0 de courbe représentative $\mathcal{C}$ dans un repère. Calculer $f(x_0)$ et $f'(x_0)$ puis donner une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse x_0.

1. $f(x) = \dfrac{x^2+4x+7}{x^2+1}, x_0 = 1$
2. $f(x) = (2x-1)^{11}, x_0 = 0$
3. $f(x) = 3x - 2\sqrt{-x} - \dfrac{5}{x}, x_0 = -1$
4. $f(x) = \sqrt{5-2x}, x_0 = 2$

Exercice 18:
Calculer la valeur exacte des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 (2x+1)^3 dx$
2. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{(2x+1)^2} dx$
3. $\displaystyle\int_2^3 \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx$
4. $\displaystyle\int_1^2 x + 1 + \frac{1}{(x+2)^2} dx$

Exercice 19:
Calculer la valeur exacte des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^2 x + 1 + \frac{2}{x} dx$
2. $\displaystyle\int_0^2 2x + 1 + \frac{3}{x+2} dx$
3. $\displaystyle\int_1^2 \frac{2x+1}{x^2+x+5} dx$
4. $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x} \ln^2(x) dx$

Exercice 20:
Calculer la valeur exacte des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_{\ln(2)}^{\ln(3)} e^x dx$
2. $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} \frac{e^x}{(e^x+1)^2} dx$
3. $\displaystyle\int_{\ln(2)}^{\ln(3)} \frac{e^t}{e^t+1} dt$
4. $\displaystyle\int_0^1 e^{-\frac{1}{2}t+1} dt$

Exercice 21:
Calculer la valeur exacte des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(3x) + 2\cos(2x) dx$
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos(2x) dx$
3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x) + \sin(3x) dx$
4. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin\left(3t + \frac{\pi}{6}\right) dt$

Exercice 22:
La travail effectué par une force F entre deux points s'exprime par $W = \displaystyle\int_0^{10^{-2}} -0,5\left(1 - \frac{0,19}{0,2-x}\right) dx$. Déterminer une valeur approchée de W arrondie à 10^{-2}.

Exercice 23:
Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{5}x + 1 + \dfrac{5}{x}$ définie sur $[2; 13]$. Déterminer la valeur exacte de sa valeur moyenne sur $[2; 13]$.

Exercice 24:
Soit $f : t \mapsto 900te^{-0,1(t-2)}$ définie sur $[0; 12]$. Déterminer la valeur exacte de sa valeur moyenne sur $[0; 12]$.