

# Nombres complexes : forme exponentielle

## 1.1 Compétences Attendues

- Passer de la forme algébrique à une forme exponentielle et inversement.
- Transformer à l'aide des formules d'addition  $a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$  en  $A \cos(\omega t + \phi)$  et inversement.
- Résoudre dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes une équation du premier degré ou du type  $z^2 = a$  pour  $a$  réel.
- Interpréter géométriquement les transformations du type  $z \mapsto z + b$ , ( $b$  étant un nombre complexe quelconque) et  $z \mapsto az$  lorsque  $a$  est un nombre réel non nul ou un nombre complexe de module 1.

## 1.2 Exercices

### Exercice 1:

Déterminer l'écriture exponentielle des nombres complexes suivants :

$$\begin{array}{|l|l|l|} \hline 1. z_1 = i & 3. z_3 = -7i & 5. z_5 = 3 - 3i \\ \hline 2. z_2 = 1 + i\sqrt{3} & 4. z_4 = 3 + 3i & 6. z_6 = 2\sqrt{3} + 2i \\ \hline \end{array}$$

### Exercice 2:

Déterminer l'écriture exponentielle des nombres complexes suivants :

$$1. z_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) \quad \left| \quad 2. z_2 = 3 \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) + 3i \sin\left(\frac{3\pi}{5}\right)\right.$$

### Exercice 3:

Déterminer l'écriture algébrique des nombres complexes suivants :

$$\begin{array}{|l|l|l|} \hline 1. z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}} & 4. z_4 = -7e^{-i\frac{\pi}{2}} & 6. z_6 = \frac{2}{7}e^{i\pi} \\ \hline 2. z_2 = 4e^{i\frac{\pi}{4}} & & \\ \hline 3. z_3 = -3e^{i\frac{\pi}{6}} & 5. z_5 = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} & \\ \hline \end{array}$$

### Exercice 4:

Soit  $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$  et  $z_2 = 4e^{-i\frac{\pi}{3}}$ .

Ecrire les nombres suivants sous forme exponentielle.

$$1. z_1 z_2 \quad \left| \quad 2. z_1^3 \quad \left| \quad 3. z_2^2 \quad \left| \quad 4. \frac{z_1}{z_2}\right.\right.\right.$$

### Exercice 5:

Soit  $z_1 = \frac{2}{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$  et  $z_2 = \frac{1}{4}e^{i\frac{2\pi}{3}}$ . Ecrire les nombres suivants sous forme exponentielle.

$$1. z_1 z_2 \quad \left| \quad 2. z_1^2 \quad \left| \quad 3. z_2^3 \quad \left| \quad 4. \frac{z_1}{z_2}\right.\right.\right.$$

### Exercice 6:

Exprimer les expressions suivantes en fonction de  $\cos(x)$  et  $\sin(x)$ .

$$\begin{array}{|l|l|} \hline 1. \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) & 3. \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \\ \hline 2. \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) & 4. \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \\ \hline \end{array}$$

### Exercice 7:

Pour tout réel  $t$ , exprimer  $\cos^2(2t)$  en fonction de  $\cos(4t)$ .

### Exercice 8:

Pour tout réel  $t$ , exprimer  $\sin^2\left(t + \frac{\pi}{8}\right)$  en fonction de  $\cos\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$ .

### Exercice 9:

On pose  $z' = e^{i\frac{\pi}{4}}z$

1. Par quelle transformation du plan le point  $M'$  est-il l'image de  $M$  ?
2. Soit le point  $A$  d'affixe  $z_A = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ . Calculer l'affixe de l'image de  $A$  par la transformation précédente.

### Exercice 10:

Déterminer l'écriture exponentielle des nombres complexes suivants :

$$\begin{array}{|l|l|l|} \hline 1. z_1 = -\sqrt{3} + 3i & 3. z_3 = -\sqrt{3} + i & 5. z_5 = \frac{7 + 7i}{3} \\ \hline 2. z_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i & 4. z_4 = \sqrt{6} + \sqrt{2}i & 6. z_6 = \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{6}i}{2} \\ \hline \end{array}$$

### Exercice 11:

Déterminer l'écriture algébrique des nombres complexes suivants :

$$\begin{array}{|l|l|} \hline 1. z_1 = e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{-i\frac{2\pi}{5}} & 3. z_3 = 2e^{i\frac{\pi}{6}} + \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \\ \hline 2. z_2 = \sqrt{2}\left(e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{-i\frac{\pi}{4}}\right) & 4. z_4 = e^{i\frac{\pi}{2}} + e^{i\frac{3\pi}{3}} \\ \hline \end{array}$$

### Exercice 12:

On donne les expressions :

$$A = 4e^{i\frac{\pi}{6}} \times 2e^{i\frac{2\pi}{3}} \quad \text{et} \quad B = \frac{\left(e^{i\frac{3\pi}{8}}\right)^2}{e^{i\frac{\pi}{4}} \times 2e^{-i\frac{\pi}{2}}}$$

1. Déterminer la forme exponentielle des nombres complexes  $A$  et  $B$ .
2. Déterminer leur forme algébrique.

**Exercice 13:**

Déterminer l'écriture exponentielle puis algébrique des nombres complexes suivants :

1.  $z_1 = \left( \cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{8}\right) \right) \left( \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \right)$
2.  $z_2 = \frac{\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{8}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)}$

**Exercice 14:**

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations suivantes :

- |                          |                         |
|--------------------------|-------------------------|
| 1. $z + i = 4 - 3i$      | 3. $(3 - 5i)z + 9 = 2i$ |
| 2. $3z - 5 - i = 3 - 5i$ | 4. $3z + 7i = 4iz + 9i$ |

**Exercice 15:**

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations suivantes :

- |                            |                        |
|----------------------------|------------------------|
| 1. $2z^2 - 10 = 0$         | 3. $(z + 5)^2 = -1$    |
| 2. $\frac{4 - z^2}{5} = 4$ | 4. $(z + 3)^2 + 7 = 0$ |

**Exercice 16:**

Soit  $A(t) = \cos(t) + \sin(t)$ .

1. Démontrer que :

$$A(t) = \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(t) + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(t) \right)$$

2. En déduire  $A(t)$  peut s'écrire sous la forme :

$$A(t) = \sqrt{2} \cos(t + \phi)$$

**Exercice 17:**

Soit  $B(t) = \sqrt{3} \cos(2\pi t) - \sin(2\pi t)$ . Démontrer que  $B(t)$  peut s'écrire sous la forme :

$$B(t) = 2 \cos(2\pi t + \phi)$$

**Exercice 18:**

Soit  $C(t) = -\sqrt{2} \cos(\pi t) + \sqrt{6} \sin(\pi t)$ . Démontrer que  $B(t)$  peut s'écrire sous la forme:

$$C(t) = A \cos(\pi t + \phi)$$

**Exercice 19:**

Soit  $f : t \mapsto 2 \sin^2 \left( \frac{1}{2}t + \frac{\pi}{6} \right)$  définie sur  $[0; 2\pi]$ .

1. Exprimer  $\sin^2 \left( \frac{1}{2}t + \frac{\pi}{6} \right)$  en fonction de  $\cos \left( t + \frac{\pi}{3} \right)$ .
2. En déduire que :

$$f(t) = 1 - \cos \left( t + \frac{\pi}{3} \right)$$

3. Déterminer une primitive  $F$  de  $f$  sur  $[0; 2\pi]$ .
4. Calculer la valeur moyenne  $\mu$  de la fonction  $f$  sur  $[0; 2\pi]$ .

**Exercice 20:**

Soient  $A(1 + 4i)$ ,  $B(-1 + 4i)$  et  $C(1 + i)$ .

1. Placer les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  dans un repère.
2. Soit  $T$  la translation de vecteur  $\vec{w}(4 - 3i)$ .
  - (a) Donner l'écriture complexe de  $T$ .
  - (b) Calculer l'affixe des points  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$  les images respectives de  $A$ ,  $B$  et  $C$  par la translation  $T$ .
  - (c) Placer les points  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$  dans le repère.
3. Déterminer l'affixe du point  $D$  dont l'image par la translation  $T$  est le point  $A$ . Placer  $D$ .

**Exercice 21:**

Calculer les intégrales suivantes :

- |                                               |                                                             |
|-----------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|
| 1. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(2x) dx$ | 2. $J = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(3x) dx$ |
|-----------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|

**Exercice 22:**

$A$  est le point d'affixe  $z_A = 1 - i$ . On désigne par  $B$  l'image du point  $A$  par une rotation  $R$  de centre  $O$  et d'angle  $\frac{\pi}{4}$ .

1. Déterminer la fonction  $f$  de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$  associée à la rotation  $R$ .
2. Déterminer l'affixe  $z_B$  du point  $B$ .

**Exercice 23:**

$A$  est le point d'affixe  $z_A = -2 + 2i\sqrt{3}$ .

1. Etablir que  $z_A = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}$ .

2. On appelle  $B$  l'image de  $A$  par la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{\pi}{6}$ . On note  $z_B$  l'affixe du point  $B$ .

- Déterminer une forme exponentielle de  $z_B$ .
- Déterminer le module et un argument de  $z_B$ .
- En déduire la forme algébrique de  $z_B$ .

**Exercice 24:**

Soit  $f : x \mapsto 1 + \sin(2x)$  définie sur  $[0; \pi]$ .

- Démontrer que la valeur moyenne de  $f$  sur  $[0; \pi]$  est  $V_m = 1$ .
- Vérifier que pour tout réel  $x$ ,  $\sin^2(2x) = \frac{1 - \cos(4x)}{2}$ .
  - La valeur efficace de  $f$  sur  $[0; \pi]$  est le nombre  $a = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x)^2 dx$ .  
Démontrer que  $a = \sqrt{\frac{3}{2}}$ .

Rappels de physique

On désigne l'impédance d'une résistance par  $Z_R = R$ , celle d'un condensateur par  $Z_C = \frac{1}{j\omega C}$  et celle d'une bobine par  $Z_L = j\omega L$ .

- L'impédance totale d'un système en série est la somme des impédances des dipôles:

$$Z = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n$$

- L'inverse de l'impédance totale d'un système en parallèle est la somme des inverses des impédances des dipôles :

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \dots + \frac{1}{Z_n}$$

**Exercice 25:**

On considère le circuit ci-contre avec  $R = 100 \, \Omega$ ,  $L = 0,02 \, \text{H}$  et  $\omega = 5\,000 \, \text{rad.s}^{-1}$ . L'impédance complexe de ce circuit est donnée par  $\underline{Z} = R + j\omega L$ .



- Ecrire  $\underline{Z}$  sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.
- Un dipôle linéaire est caractérisé par :
  - Son impédance  $Z = |\underline{Z}|$  ;

- Le déphasage  $\phi = \arg(\underline{Z})$  qu'il produit entre la tension  $u$  aux bornes  $A$  et  $B$  du dipôle et l'intensité qui le traverse.

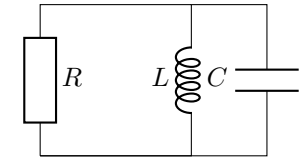
En déduire :

- L'impédance  $|\underline{Z}|$  du circuit ;
- Le déphasage  $\phi$  qu'il produit.

**Exercice 26:**

On considère le circuit ci-contre avec  $R = 10 \, \Omega$ ,  $\omega = 5\,000 \, \text{rad.s}^{-1}$ ,  $L = 0,02 \, \text{H}$  et  $C = 10^{-5} \, \text{F}$ .

L'impédance complexe de ce circuit est donnée par :  $\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C$ .



- Ecrire  $\frac{1}{\underline{Z}}$  sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.

2. En déduire :

- $\underline{Z}$  sous forme exponentielle.
- L'impédance  $|\underline{Z}|$  du circuit.
- Le déphasage  $\phi$  qu'il produit.

**Exercice 27:**

Un dipôle passif soumis à une tension  $u(t) = 24\sqrt{2} \sin\left(200t + \frac{\pi}{4}\right)$  est traversé par un courant d'intensité  $i(t) = 0,4\sqrt{2} \sin\left(200t - \frac{\pi}{3}\right)$ .

- Déterminer les nombres complexes  $\underline{U}$  et  $\underline{I}$  associés à cette tension et cette intensité.
- L'impédance de ce dipôle est donnée par  $\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}$ .

- Ecrire  $\underline{Z}$  sous forme exponentielle.

- En déduire son impédance  $Z$ , puis le déphasage  $\phi$  qu'il produit entre la tension et l'intensité.

**Exercice 28:**

Au niveau d'un noeud, on sait que deux intensités (en ampère)  $i_1$  et  $i_2$  vérifient :

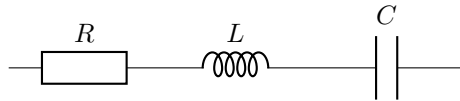
$$i_1(t) = 5\sqrt{2} \sin(100t)$$

$$i_2(t) = 3\sqrt{2} \sin\left(100t + \frac{\pi}{4}\right)$$

- Déterminer les nombres complexes  $\underline{I}_1$  et  $\underline{I}_2$  associés à ces intensités.
- La loi des noeuds appliquée ici donne  $\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$ .
  - Démontrer que  $\underline{I} = 5 + \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}j$ .
  - Calculer  $I$  le module de  $\underline{I}$ .
  - Calculer  $\phi$  un argument de  $\underline{I}$ .
- Ecrire  $\underline{I}$  sous forme exponentielle.
  - Quelle est l'intensité efficace de  $i$  ? Quel est son déphasage à l'origine ?
  - En déduire une expression de  $i(t)$ .

**Exercice 29:**

Dans le circuit ci-dessous on donne  $R = 150 \, \Omega$ ,  $C = 2 \times 10^{-6} \, \text{F}$ ,  $L = 0,35 \, \text{H}$  et  $\omega = 1\,000 \, \text{rad.s}^{-1}$ .



L'impédance complexe de ce circuit est  $\underline{Z} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$ .

- Ecrire  $\underline{Z}$  sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.
- Ce circuit est soumis à une tension sinusoïdale appliquée entre  $A$  et  $B$ , de tension efficace  $U$  égale à  $35 \, \text{V}$ , de pulsation  $\omega = 1\,000 \, \text{rad.s}^{-1}$  et de déphasage à l'origine  $\phi = \frac{\pi}{6}$ .
  - Exprimer la tension  $u$  en fonction du temps  $t$  sous la forme  $u(t) = U\sqrt{2}\sin(\omega t + \phi)$ .
  - Donner l'écriture exponentielle du nombre complexe  $\underline{U}$ .
- La loi d'Ohm avec les nombres complexes s'écrit  $\underline{U} = \underline{Z} \times \underline{I}$ .
  - Démontrer que  $\underline{I} = \frac{7\sqrt{2}}{60} e^{j\frac{5\pi}{12}}$ .
  - En déduire l'intensité efficace traversée par ce circuit ainsi que son déphasage à l'origine.

**Exercice 30:**

Les résistances et les condensateurs sont des composants électroniques utilisés dans le domaine du son pour concevoir des filtres. Placé en sortie d'un microphone, un filtre atténue plus ou moins les sons selon leur fréquence  $f$ , exprimée en Hertz (Hz).

Pour un filtre donné, l'atténuation d'un son se calcule à l'aide de deux nombres complexes  $z_R = 10$  et  $z_C = -\frac{1\,000\sqrt{3}}{f}j$ .

- On choisit un son grave de fréquence  $f = 100 \, \text{Hz}$ .
  - Montrer que  $z_C = -10\sqrt{3}j$ .
  - Déterminer la forme exponentielle de  $z_C$ .
    - On considère le nombre complexe  $Z = z_R + z_C$ . On a donc  $Z = 10 - 10\sqrt{3}j$ . Déterminer la forme exponentielle de  $Z$ .
    - On considère le nombre complexe  $z_G = \frac{z_C}{z_R + z_C}$ . Montrer que  $z_G = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-j\frac{\pi}{6}}$ .
    - Le module du nombre complexe  $z_G$  est appelé gain du filtre. Donner la valeur exacte du gain du filtre puis une valeur approchée au centième.
- On choisit un son aigu de fréquence  $f = 1\,000\sqrt{3}$ .
  - Montrer que  $z_G = \frac{-j}{10 - j}$ .
  - Déterminer la forme algébrique de  $z_G$ .
  - Calculer une valeur exacte du gain du filtre  $|z_G|$  et en donner une valeur approchée. Arrondir au centième.