Chapitre 6 : Variables aléatoires

Table des matières

Contenu

- Espérance d'une variable aléatoire discrète.
- Loi de binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, espérance.
- Coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$.

1 Introduction

On s'intéresse à deux personnes qui jouent à lancer chacuns leur tour deux dés non truqués, le gagnant est celui pour qui la somme des deux dés est la plus grande.

On conçoit bien que seul la somme des deux comptes et pas la manière de faire cette somme (2 et 6, 3 et 4, 4 et 4 pour faire 8)

On va alors créer une variable X qui associe à chaque lancer la somme des deux dés. Chaque valeur de possible de cette somme a une probabilité qui lui est associé. (probabilité de faire 2,3,4...)
On convient de dire que X est une variable aléatoire.

Définition:
Soit une expérience aléatoire donnée d'univers Ω. On définit une variable aléatoire X sur Ω si à tout élément de Ω on associe un élément de $\mathbb{R}$.

En notant $E = \{x_1, ..., x_n\}$ l'ensemble des valeurs prises par une variable aléatoire X. On va noter $\{X = x_i\}$ l'événement regroupant l'ensemble des issues auxquelles on associe le réel x_i

! Remarque

En reprenant l'exemple introductif avec les lancers de dés. On a l'analogie entre les notations :
$\{X = 8\} \longleftrightarrow$ "La somme des deux dés est égale à 8"
C'est une sorte de "traduction" du langage courant en langage mathématiques.

On peut de même définir l'évènement:
$\{X \leq 8\} \longleftrightarrow$: "La somme des deux dés est inférieure ou égale à 8"

Exemple:
On prend pour autre exemple un sac contenant cinqs billes (1 verte, 2 rouges, 2 bleues). Tirer la verte fait perdre 10 euros, une rouge gagner 1 euro, une bleues 4 euros. On peut définir alors une variable aléatoire X qui prendra les valeurs du gain à savoir $E = \{-10, 1, 4\}$.

2 Lois de probabilité et espérance

Définition:
Soit X une variable aléatoire sur Ω à valeurs dans $E = \{x_1, ..., x_n\}$. On a vu qu'on pouvait noter $\{X = x_i\}$ l'événement "X prend la valeur x_i". On définit alors une loi de probabilité $\mathbb{P}_X$ associé à cet événement : $\mathbb{P}_X(x_i) = \mathbb{P}(X = x_i)$.
Il est possible de représenter une loi de probabilité par un tableau :

x_i	x_1	...	x_n
$\mathbb{P}(X = x_i) = p_i$	p_1	...	p_n

Exemple:
En reprenant l'exemple précédent des billes, on a $E = \{-10, 1, 4\}$ et :

$$\mathbb{P}(X = -10) = \frac{1}{5}\ ; \qquad \mathbb{P}(X = 1) = \frac{2}{5}\ ; \qquad \mathbb{P}(X = 4) = \frac{2}{5}\ ;$$

En représentant ces données dans un tableau on a :

x	-10	1	4
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$

On connaît donc le formalisme adéquat à la représentation d'expérience aléatoire. Dans l'exemple précédent, on a donc les probabilités de gain, mais alors qu'est ce que ça nous dit ? On aimerait bien savoir si le jeu est favorable ou pas, c'est-à-dire si j'ai en moyenne plus de chance de gagner ou de perdre.

Définition:
Soit X une variable aléatoire a valeurs dans $E = \{x_1, \ldots, x_n\}$ et $\mathbb{P}_X$ sa loi de probabilité. On définit l'espérance de la variable aléatoire X par :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k \mathbb{P}(X = x_k) = x_1\mathbb{P}(X = x_1) + \ldots + x_n\mathbb{P}(X = x_n)$$

! Remarque

L'espérance peut s'interpréter comme la moyenne des valeurs prises par X quand l'expérience aléatoire est répétée un très grand nombre de fois.

Exemple:
En reprenant encore l'exemple du sac de bille on calcule l'espérance du gain et on obtient:

$$\mathbb{E}(X) = -10 \times \mathbb{P}(X = -10) + 1 \times \mathbb{P}(X = 1) + 4 \times \mathbb{P}(X = 4) = -10 \times \frac{1}{5} + 1 \times \frac{2}{5} + 4 \times \frac{2}{5} = 0$$

3 Loi de Bernoulli

Définition:
Soit Ω l'univers des possibilités d'une épreuve de Bernoulli de paramètres p. On appelle variable aléatoire de succès la fonction X, définie sur Ω, qui à chaque issue associe 1 s'il s'agit d'un succès ou 0 s'il s'agit d'un échec.
On dit que X suit une loi de Bernoulli de paramètre p:

$$\mathbb{P}(X = 1) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$$

Exemple:
Au jeu du pile ou face où l'on gagne si on fait face on a :

$$\mathbb{P}(X = 1) = 0,5 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X = 0) = 0,5$$

Définition:
Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p. On a l'espérance de x qui est donnée par :

$$\mathbb{E}(X) = 1 \cdot \mathbb{P}(X = 1) + 0 \cdot \mathbb{P}(X = 0) = p$$

Exemple:
Au jeu du pile ou face où l'on gagne si on fait face on a : $\mathbb{E}(X) = 0,5$

4 Loi binomiale

Définition:
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0;1]$. On dit qu'une variable suit une loi bibomiale de paramètre n et p, noté $X \sim \mathcal{B}(n;p)$, lorsque X compte le nombre de succès obtenus pour n répétitions d'une épreuve de Bernoulli de paramètre p.

Définition:
Soient $k \leq n$, $p \in [0;1]$. Une variable aléatoire $X \sim \mathcal{B}(n;p)$ si on a :

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{où} \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Exemple:
Si $X \sim \mathcal{B}(5; \frac{1}{6})$, on a $\mathbb{P}(X = 2) = \binom{5}{2} \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(1 - \frac{1}{6}\right)^3 = 10 \times \frac{1}{36} \times \frac{125}{216}$.

Propriété:
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0;1]$ et $X \sim \mathcal{B}(n;p)$. On a $\mathbb{E}(X) = np$.

5 Exercice bilan

On considère une situation où la probabilité de réussir un entretien d'embauche est égale à $0,12$. On interroge dix candidats et on suppose leur embauche indépendante de celle des autres candidats. On note X la variable aléatoire égale au nombre de candidats qui ont réussi leur entretien d'embauche parmi les dix.

1. Etablir la loi de probabilité de X. Quelle loi reconnaît-on ?
2. Calculer l'espérance de X et interpréter dans le contexte de l'énoncé.