Chapitre 1 : Généralités sur les fonctions

Axel Carpentier

Terminale technologique :

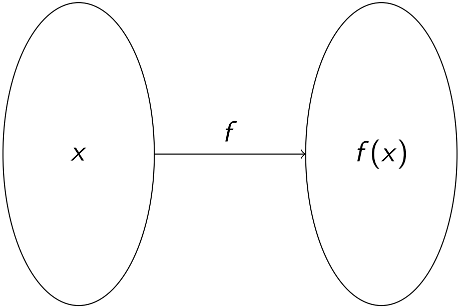
Tronc commun

Table des matières

Définitions

Définition:

Définir une fonction f sur un ensemble de réels $\mathcal{D}_f$, c'est associer à chaque réel $x \in \mathcal{D}_f$ un réel y.
Afin de bien comprendre que y dépend de x, on le note donc $y = f(x)$.



Définitions

Notation et vocabulaire:

- On appelle domaine de définition de f, noté $\mathcal{D}_f$, l'ensemble des valeurs sur lequel f est définie.
- On note $f : x \mapsto f(x)$,la fonction qui à x associe $f(x)$. $y = f(x)$ est l'image de x, x est un antécédent de y.
- On appelle courbe représentative d'une fonction f dans le plan, notés $\mathcal{C}_f$, l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $x \in \mathcal{D}_f$ et $y = f(x)$

Remarque IMPORTANTE

Il ne faut pas confondre f et $f(x)$! f représente une fonction tandis que $f(x)$ représente un nombre réel.

Remarque

L'ensemble de définition d'une fonction, définie par une expression, est l'ensemble des valeurs pour lesquelles le calcul d'une image a un sens. Il n'existe que deux cas (en classe de Seconde) où le calcul n'est pas possible : la division par 0 et la racine carré d'un nombre négatif.

<u>Exercice</u>:

Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes :

- $f_1 : x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$;
- $f_2 : x \mapsto \dfrac{3x}{x^2-1}$;
- $f_{,,} : x \mapsto \dfrac{x-1}{x^2+1}$;
- $f_4 : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$;
- $f_5 : x \mapsto \sqrt{x-1}$;
- $f_6 : x \mapsto \sqrt{2-x^2}$;

Définitions

Remarque importante

On a deux manières de comprendre une fonction : une expression algébrique ou un graphique. Exemple : la fonction carré/cube/...

Méthode:

- Pour déterminer une image d'un réel a :
  - Graphiquement :
    On place a sur l'axe des abscisses, on prend le point de la courbe d'abscisse a et on lit son ordonnée.
  - Algébriquement :
    On remplace tous les x par a dans l'expression algébrique de f.
- Pour déterminer un antécédent d'un réel k :
  - Graphiquement :
    On se place en k sur l'axe des ordonnées, on prend le ou les points de la courbe d'ordonnée k et on lit leurs abscisses.
  - Algébriquement :
    On cherche toutes les valeurs de $x \in \mathcal{D}_f$ telles que $f(x) = k$.

Définitions

Exercice :

Soit $f : x \mapsto x^2 + 1$.

1. Quel est le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f ?
2. Calculer l'image de 3 par f.
3. Calculer le (ou les) antécédent(s) de 10 par f.

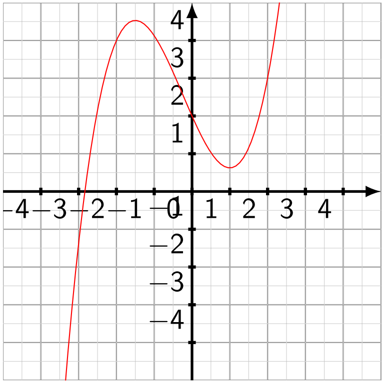
Définitions

Exercice:

Soit la représentation graphique $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f ci-dessous.

1. Quel est le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f ?
2. 2.1 Déterminer l'image de 2 par f.

   2.2 Déterminer $f(-2)$.
3. Calculer le (ou les) antécédent(s) de 2 par f.



Résolutions graphiques

Méthode:

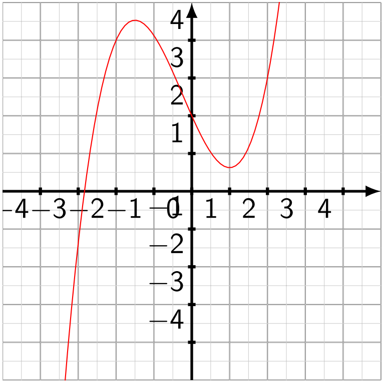
- Résoudre une équation $f(x) = k$ revient à déterminer les antécédents de k par la fonction f.
- Résoudre une inéquation $f(x) \geq k$ (respectivement $f(x) \leq k$) revient à déterminer les points de la courbe de f dont l'ordonnée est supérieure (respectivement inférieure) à k puis l'ensemble de leurs abscisses.

Résolutions graphiques

Exercice:

Soit la représentation graphique $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f ci-dessous.

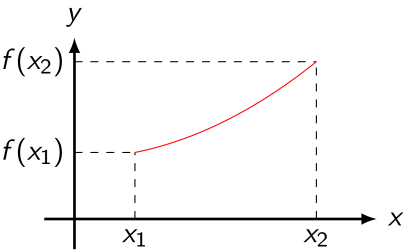
1. Déterminer la (ou les) solution(s) de $f(x) = -2$
2. Déterminer la (ou les) solution(s) de $f(x) = 4$
3. Déterminer les solutions de $f(x) < 0$.
4. Déterminer les solutions de $f(x) \geq 2$.



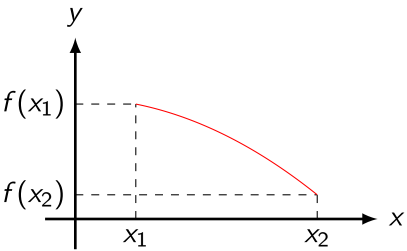
Définition:

Soient $x_1 \leq x_2$ deux réels quelconques et f une fonction affine.

- f est dite croissante si $f(x_1) \leq f(x_2)$ c'est-à-dire qu'elle conserve l'ordre.
- f est dite décroissante si $f(x_1) \geq f(x_2)$ c'est-à-dire qu'elle renverse l'ordre.
- f est dite constante si $f(x_1) = f(x_2)$.



Fonction croissante



Fonction décroissante

Variations, signes et extremums

Propriété fondamentale:

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- f est strictement croissante sur I si et seulement si $\forall x \in I, f'(x) > 0$;
- f est strictement décroissante sur I si et seulement si $\forall x \in I, f'(x) < 0$;
- f est constante sur I si et seulement si $\forall x \in I, f'(x) = 0$;

On rappelle les dérivées de fonctions usuelles vues en classe de Première :

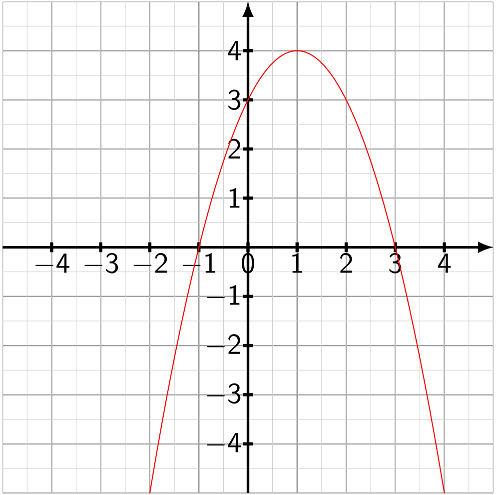
Fonction f	**Dérivée** f'
$f(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}$	$f'(x) = a$
$f(x) = ax^2$, $a \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 2ax$
$f(x) = ax^3$, $a \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 3ax^2$

Exercice :

Etablir le tableau de variations de la fonction $f : x \mapsto 2x^2 + 8x - 5$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice bilan

On considère la fonction $f : x \mapsto -(x+1)(x-3)$ définie sur $[-5;5]$. La courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est donnée ci-dessous.



Exercice bilan

1. Répondre graphiquement aux questions suivantes:
   1.1 Déterminer l'image de 1 par f.
   1.2 Résoudre l'équation $f(x) = 0$
   1.3 Résoudre l'inéquation $f(x) > 2$.
2. Reprendre les questions précédentes par le calcul.
3. Etablir le tableau de signe de f.
4. Développer $f(x)$ puis déterminer l'expression de $f'(x)$.
5. Etablir le tableau de signe de $f'(x)$ puis le tableau de variation complet de f.
6. En déduire le maximum de f sur son intervalle de définition.