Chapitre 4 : Probabilités conditionnelles

Axel Carpentier

Terminale technologique :

Tronc commun

Table des matières

Probabilité conditionnelle

Définition:

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire. On considère un évènement B dans Ω de probabilité non nulle $\mathbb{P}(B) \neq 0$.
Pour tout évènement A, on appelle probabilité de A sachant B, noté $\mathbb{P}_B(A)$ (ou $\mathbb{P}(A|B)$) la quantité :

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\text{Nombre de cas pour A} \cap B}{\text{Nombre de cas pour A}}$$

Probabilité conditionnelle

D'après la définition précédente, on a que pour deux événements A et B :

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

On en déduit donc la propriété suivante :

Propriété:

Dans certain cas on peut être amené à connaître la probabilité conditionnelle.
On a alors $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B)$

ATTENTION

Les quantités $\mathbb{P}_B(A)$ et $\mathbb{P}_A(B)$ n'ont aucunes raisons d'être égales

Probabilité conditionnelle

Exemple:

Dans un sac de dragées, 60% des dragées sont de couleur bleue, 30% des dragées sont bleues et à l'amande et 40% des dragées bleues sont au chocolat. On choisit une dragée au hasard dans le sac. On note les événements :

- A : "la dragée est à l'amande"
- B : "la dragée est bleue"
- C : "la dragée est au chocolat"

La probabilité d'obtenir une dragée à l'amande sachant qu'elle est bleue est

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{0,3}{0.6} = 0,5$$

La probabilité d'obtenir une dragée bleue et au chocolat est

$$\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(C) = 0,6 \times 0,4 = 0,24$$

Indépendance

Définition:

Deux événements A et B sont dits indépendants si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$, c'est-à-dire si $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$.

Exercice:

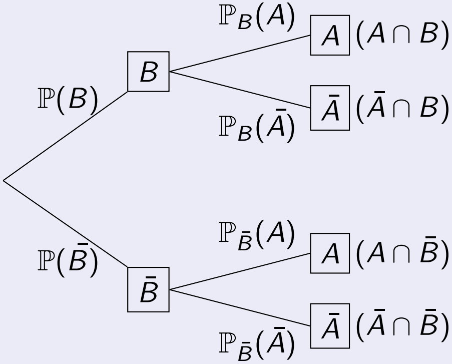
On lance deux fois de suite une pièce de monnaie.

On considère les événements A : "obtenir pile au premier lancer" et B : "obtenir deux résultats identiques". Ces deux événements sont-ils indépendants ?

Arbre de probabilités

Définition:

Considérons une expérience aléatoire quelconque d'univers Ω et deux événements A et B. Il est possible de représenter les possibilités de l'expérience aléatoire par un arbre de probabilité :



Arbre de probabilités

Définition:

Une branche (ou segment) représente une probabilité, conditionnelle à partir du premier événement.
Un noeud est une jonction entre deux branches, représentant un événement conditionnant un autre.
Un chemin est un événement finalement réalisé, en suivant des branches successives.

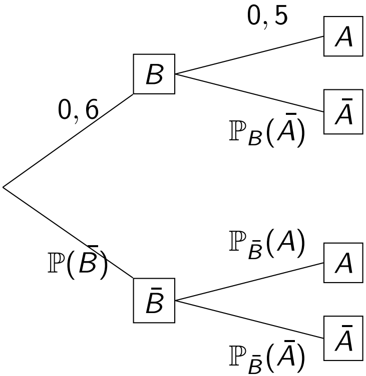
Propriété:

La somme des probabilités des branches issues d'un noeud est 1.
La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités associées à ses branches.
La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui y mènent :
$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\bar{A} \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B)$

Arbre de probabilités

Exemple:

On reprend l'exemple précédent :



$A \cap B$: la dragée est bleue et à l'amande

$\bar{A} \cap B$: la dragée est bleue et pas à l'amande

$A \cap \bar{B}$: la dragée est à l'amande et pas bleue

$\bar{A} \cap \bar{B}$: la dragée n'est ni bleue ni à l'amande

On en déduit : $\mathbb{P}(\bar{B}) = 0,4$ et $\mathbb{P}_B(\bar{A}) = 0,5$ et on retrouve les résultats précédemment trouvés.

Arbre de probabilités

Propriété: *Formule des probabilités totales*

Soit A_1, A_2, A_3 des événements deux à deux disjoints et B un évènement quelconque. On a alors :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A_1 \cap B) + \mathbb{P}(A_2 \cap B) + \mathbb{P}(A_3 \cap B)$$

Exercice bilan

Un site internet a une audience séparée en deux types : les respectueux qui représentent 90% des inscrits et les trolls 10%. Les premiers ont une probabilité de $0,1$ de participer à une discussion houleuse sur une journée, les seconds $0,7$.
Un nouvel utilisateur s'inscrit. Avec quelle probabilité participe-t-il à une discussion houleuse dès le premier jour ? Dans les deux premiers jours ? Notons T l'événement "le nouvel arrivant est un troll" et H l'événement "il participe à une discussion houleuse".
Construire un arbre pondéré réprésentant la situation puis calculer $\mathbb{P}(H)$.