1 Fonction logarithme décimal

1.1 Compétences Attendues

- Utiliser le logarithme décimal pour résoudre une équation du type $a^x = b$ ou $x^a = b$ d'inconnue x réelle, une inéquation du type $a^x < b$ ou $x^a < b$ d'inconnue x réelle ou du type $a^n < b$ d'inconnue n entier naturel.
- Utiliser les propriétés algébriques de la fonction logarithme décimal pour transformer des expressions numériques ou littérales.

1.2 Exercices

Exercice 1:
Résoudre dans $]0;+\infty[$ les équations suivantes :

1. $\log(x) = 1$
2. $\log(x) = -2$
3. $\log\left(\dfrac{t}{3}\right) = 2$
4. $\log\left(\dfrac{t}{10^{-12}}\right) = 50$

Exercice 2:
Résoudre dans $]0;+\infty[$ les équations suivantes :

1. $\log(x) = -1$
2. $\log(x) = 2$
3. $\log\left(\dfrac{t}{2}\right) = -2$
4. $\log(2t) = 3$

Exercice 3:
Simplifier l'écriture de chacune des expressions suivantes.

1. $\log(10^3)$
2. $\log(10^{-4})$
3. $\log\left(\dfrac{1}{10^2}\right)$
4. $\log(10^{t+10})$

Exercice 4:
Résoudre les équations suivantes. Donner la valeur exacte puis la valeur approchée à 10^{-4} de la solution.

1. $(0,8)^x = 0,5$
2. $(1,05)^t = \dfrac{100}{67}$
3. $3000(0,913)^x = 1500$
4. $0,4 \times 10^t + 90 = 102$

Exercice 5:
Résoudre les équations suivantes. Donner la valeur exacte puis la valeur approchée à 10^{-4} de la solution.

1. $(0,951)^x = 0,05$
2. $(1,035)^t = 2$
3. $4(0,819)^x = 2,2$
4. $500(1 - 0,82^t) = 370$

Exercice 6:
On étudie l'évolution d'une culture bactérienne en milieu liquide non renouvelé. On admet que l'expression $f(t) = 400(1,22)^t$ donne le nombre de bactéries présentes dans cette culture en fonction du temps t, exprimé en heures.

1. Calculer le nombre de bactéries présentes dans le liquide à l'instant $t = 0$ puis au bout de 5h30min.
2. Déterminer au bout de combien de temps la population de bactéries aura doublé.

Exercice 7:
Résoudre les équations suivantes. Donner la valeur exacte puis la valeur approchée à 10^{-4} de la solution.

1. $x^3 = 1,68$
2. $x^4 = 2,12$
3. $x^{12} = 0,85$
4. $x^3 = 1,10$
5. $x^4 = 1,50$
6. $x^{12} = 1,045$

Exercice 8:
Résoudre les inéquations suivantes. Donner la valeur exacte puis la valeur approchée à 10^{-4} de la solution.

1. $0,9^x \leq 0,4$
2. $10^4 \times 1,2^t \leq 20\ 000$
3. $10^{-1} \times 1,1^t \leq 1\ 000$
4. $2\ 000 \times 0,732^x \leq 500$

Exercice 9:
Résoudre les inéquations suivantes. Donner la valeur exacte puis la valeur approchée à 10^{-4} de la solution.

1. $x^3 < 3$
2. $x^{1,3} < 2$
3. $x^4 < 2,5$
4. $x^{0,5} < 3$
5. $x^3 < 0,5$
6. $x^4 < 1,2$

Exercice 10:

1. Déterminer le plus petit entier n tel que $(1,045)^n \geq 2$.
2. Déterminer le plus grand entier n tel que $(0,9)^n \geq 0,5$.

Exercice 11:
Dans cet exercice on étudie le lien qui existe entre la puissance d'un effort fourni et la fréquence cardiaque d'un individu.
On admet que la fréquence cardiaque d'une sportive en fonction de la puissance de l'effort qu'elle fournit est donnée par la fonction $f : x \mapsto 50 \times 1,004^x + 10$ où :

- x est la puissance de l'effort fourni exprimée en watts (W).
- $f(x)$ est le nombre de battements du coeur par minute (bpm)

1. Calculer la fréquence cardiaque de cette sportive si elle exerce un effort d'une puissance de 200 W. On donnera la valeur exacte puis la valeur approchée arrondie à l'unité.
2. Déterminer la puissance que doit fournir la sportive pour que sa fréquence cardiaque arrive à 180 battements par minute. On donnera la valeur exacte puis la valeur approchée arrondie à l'unité.

Exercice 12:
On place un capital $C_0 = 1\ 000$ euros à 1% par an avec intérêts composés, ce qui signifie que les intérêts d'une année s'ajoutent au capital et que l'année suivante ils rapportent eux aussi des intérêts. On note C_n le capital obtenu au bout de n années.

1. Calculer C_1, C_2 et C_3.
2. (a) Donner, pour tout n, l'expression de C_{n+1} en fonction de C_n.
   (b) En déduire que les nombres C_0,...,C_n sont des termes successifs d'une suite géométrique de premier terme C_0 dont on précisera la raison.
   (c) Donner l'expression de C_n en fonction de n. Calculer C_{10}.
3. (a) Déterminer le plus petit entier n tel que $1,01^n \geq 1,2$
   (b) Déduire de la question précédente au bout de combien d'années le capital initial a augmenté de 20%.

Exercice 13:
Soit la suite géométrique définie pour tout n par $C_{n+1} = 1,0075C_n$ et $C_0 = 1\ 000$.

1. Calculer C_1, C_2 et C_3.
2. Pour tout entier n, exprimer C_n en fonction de n.
3. Déterminer le plus petit entier n tel que $C_n \geq 1,1C_0$.
4. C_n est la valeur acquise au bout de n années d'un capital C_0 placé sur un livret A au taux annuel de $0,75\%$. Donner une interprétation du résultat obtenu à la question précédente.

Exercice 14:
Au bout de la première semaine de fonctionnement, la production de boîtes d'un médicament générique est de 200 000 unités. Par la suite, on envisage d'augmenter cette production de 3% par semaine. On note u_1 la production, en unités, à la fin de la première semaine ($u_1 = 200\ 000$), u_2 la production, en unités, à la fin de la deuxième semaine,..., u_n la production, en unités, à la fin de la n-ième semaine.

1. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Préciser la raison de cette unité.
2. (a) Exprimer u_n en fonction de n.
   (b) En déduire la production au bout de la 12ième semaine. Le résultat est à arrondir à l'unité.
3. (a) Déterminer le plus petit entier n tel que $200\ 000 \times 1,03^{n-1} \geq 300\ 000$.
   (b) Déduire de la question précédente le nombre n de semaines nécessaires pour que la fabrication atteigne 300 000 boîtes.

Exercice 15:
Le niveau sonore, ou niveau d'intensité acoustique, mesuré en décibels (dB), d'un son d'intensité I (exprimée en watt par m^2) est $L = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ où I_0 est l'intensité de référence (c'est-à-dire l'intensité du son la plus faible audible par l'oreille humaine). On donne $I_0 = 10^{-12}$ dB. Reproduire et compléter le tableau suivant :

Valeur de L	10	30	40	50	60	100	120
Valeur de I							1

Exercice 16:
L'unité d'intensité du son utilisée dans cet exercice est le décibel (dB). Une source sonore émet un son d'intensité 100 dB ($u_0 = 100$). On appelle u_n l'intensité du son mesurée après la traversée de n plaques d'isolation phonique, sachant que chaque plque d'isolation absorbe 10% de l'intensité du son qui lui parvient. PAr exmple, $u_1 = u_0 - \frac{10}{100}u_0$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. En déduire la nature de la suite (u_n).
3. Donner l'expression de u_n en fonction de u_0 et de n.

4. Quelle intensité sonore obtient-on avec dix plaques d'isolation phonique ?
5. Déterminer à partir de quelle valeur de n l'intensité du son devient inférieure à 1 dB.

Exercice 17:
Le 1er janvier 2019, la population d'un pays s'élevait à 30 millions d'habitants. On estime que l'augmentation de la population pour les 15 ans à venir sera de 2% par an.

1. Calculer la population au 1er janvier 2020 puis au 1er janvier 2026.
2. Quelle est l'augmentation en pourcentage, entre la population au 1er janvier 2019 et la population au 1er janvier 2026 ?
3. Résoudre l'inéquation $1,02^x \geq 1,2$.
4. Déterminer l'année à partir de laquelle la population dépassera 36 millions d'habitants.

Exercice 18:
On a injecté 1 cm^3 de produit calmant à un malade. Toutes les demi-heures, son organisme élimine 10% du produit restant chez le malade.

1. Quel volume de ce produit calmant a-t-il éliminé au bout de six heures ? Arrondir à 10^{-2}.
2. Sachant que ce produit n'est plus efficace lorsque le volume restant est inférieur à 500 mm^3, au bout de combien de temps le produit sera-t-il inefficace ?

Exercice 19:

1. Soit N_0 le nombre d'atomes de carbone 14 à l'instant $t = 0$, N_1 le nombre d'atomes de carbone 14 un siècle après, N_k le nombre d'atomes de carbone 14 après k siècles. On sait que le nombre d'atomes de carbone 14 diminue très lentement au cours du temps : environ $1,24\%$ par siècle.
   (a) Donner l'expression de N_1 en fonction de N_0 puis de N_{k+1} en fonction de N_k.
   (b) En déduire la nature de la suite (N_k) et l'expression de N_k en fonction de N_0 et de k.
   (c) Donner, en le justifiant, le sens de variation de la suite (N_k).
2. Le carbone 14 est renouvelé constamment chez les êtres vivants ; à la mort de ceux-ci, l'assimilation cesse et la carbone 14 se désintègre.
   Des archéologues ont trouvé des fragments d'os dont la teneur en carbone 14 est 40% de celle d'un fragment d'os actuel de même masse, pris comme témoin.
   Calculer l'âge de ces fragments. On arrondira le résultat au siècle près.

Exercice 20:
En chimie, le pH est défini par $\text{pH} = -\log[H_3O^+]$ où $[H_3O^+]$ est la concentration en ions H_3O^+, exprimée en mol/L, d'une solution aqueuse.
La concentration en H_3O^+ est $1,75 \times 10^{-12}$ mol/L. Calculer le pH de cette solution. Arrondir à 10^{-2}.

Exercice 21:

1. La concentration en H_3O^+ d'une solution est $2,4 \times 10^{-10}$ mol/L. Calculer le pH de cette solution. Arrondir à 10^{-2}.
2. Le pH d'une solution est 3. Etablir que $[H_3O^+] = 10^{-3}$ mol/L.
3. Démontrer que si la concentration d'une solution est divisée par 100, son pH augmente de 2.

Exercice 22:
Une compagnie d'assurance estime que la valeur marchande d'une machine pour les laboratoires achetée 2 000 euros la 1er janvier 2019 baisse de 18% par an.

1. Calculer la valeur résiduelle de la machine le 1er janvier 2020 puis le 1er janvier 2021.
2. Montrer que les valeurs résiduelles successives sont les termes d'une suite géométrique dont on précisera la raison.
3. On considère la fonction $f : t \mapsto 2\,000 \times 0,82^t$ définie sur $[0;18]$. Quel est le sens de variation de f ?
4. Résoudre, par le calcul, l'inéquation $f(t) \leq 500$.
5. En déduire à partir de quelle année la valeur résiduelle de la machine est inférieure ou égale au quart de sa valeur initiale.

Exercice 23:
On dépose un morceau de viande sur un comptoir l'été à 14h00, la température avoisinant les 35°C. Ce morceau de viande contient 100 bactéries et, dans ces conditions, le nombre de bactéries double toutes les 15 minutes.
On note u_0 la nombre de bactéries à 14h00, u_1 le nombre de bactéries à 14h15 et u_n le nombre de bactéries n quarts d'heure après 14h00.

1. Recopier et compléter le tableau suivant :

Heure	14h00	14h15	14h30	14h45	15h00
Rang : n	0	1	2	3	4
Nombre de bactéries : u_n	100				

2. Si u_n est le nombre de bactéries à un moment déterminé, u_{n+1} correspond au nombre de bactéries 15 minutes plus tard. Quelle est la relation entre u_n et u_{n+1} ?

3. Préciser la nature de la suite (u_n) définie précédemment et sa raison.

4. Exprimer u_n en fonction de n.

5. On estime qu'à partir de 150 000 bactéries présentes dans un aliment, celui-ci atteint un niveau impropre à la consommation pour l'être humain. Jusqu'à quelle heure, arrondie au quart d'heure, l'être humain peut-il consommer sans risque le morceau de viande ?

Exercice 24:
On s'intéresse, lors d'une expérience, à la croissance d'une population de bactéries dont le nombre triple toutes les heures. A l'instant $t = 0$ la population est de 10 germes.

1. Reproduire et compléter le tableau suivant :

Temps en heure	0	1	2	6	9
Nombre de germes	10				

2. On note u_0 le nombre de germes à l'instant $t = 0$, u_n le nombre de germes à l'instant $t = n$.

   (a) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

   (b) En déduire la nature de la suite de terme général u_n et donner ses caractéristiques.

   (c) Donner l'expression de u_n en fonction de n.

3. (a) Résoudre sur $[0; +\infty[$ l'équation $3^x = 10^6$.

   (b) En déduire au bout de combien d'heures la population dépasse 10^7 germes.