# 1 Variables aléatoires

## 1.1 Compétences Attendues

- Calculer l'espérance d'une variable aléatoire discrète dans des cas simples et l'interpréter.
- Reconnaître une situation relevant de la loi binomiale et en identifier le couple de paramètres.
- Calculer des coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ à l'aide du triangle de Pascal pour $n \leq 10$.
- Lorsque la variable aléatoire X suit une loi binomiale : interpréter l'événement $\{X = k\}$ sur un arbre de probabilité, calculer les probabilités des événements $\{X = 0\}$, $\{X = 1\}$, $\{X = n\}$, $\{X = n - 1\}$ et de ceux qui s'en déduisent par réunion.
- Calculer la probabilité de l'événement $\{X = k\}$ à l'aide des coefficients binomiaux.

## 1.2 Exercices

**Exercice 1:**
On choisit au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. Si l'on obtient un 7, un 8, un 9 ou un 10, on perd 3 euros. Si l'on obtient un Valet, une Dame ou un Roi, on gagne 2 euros. Si l'on obtient un as, on gagne 5 euros. Soit $X$ la variable aléatoire qui, à chaque lancer, associe le gain du joueur. Donner l'ensemble des valeurs prises par $X$.

**Exercice 2:**
Une urne contient 5 boules jaunes, 3 boules rouges et 4 boules vertes. On tire simultanément trois boules de l'urne. On appelle $X$ la variable aléatoire qui, à chaque tirage de trois boules, associe le nombre de boules rouges obtenues.

1. Quelles sont les valeurs prises par $X$ ?
2. Décrire l'événement $\{X = 2\}$ puis l'événement $\{X < 1\}$.

**Exercice 3:**
On lance un dé cubique équilibré. On gagne 5 euros si l'on obtient la face numérotée "3" et on gagne 1 euro dans les autres cas. Soit $X$ la variable aléatoire qui, à chaque lancer, associe le gain du joueur. Donner $\mathbb{P}(X = 1)$ et $\mathbb{P}(X = 5)$.

**Exercice 4:**
Soit $X$ la variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par le tableau :

| $x_i$ | 2 | 5 | 10 |
|---|---|---|---|
| $p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$ | 0,15 | 0,5 | 0,35 |

1. Vérifier que $\sum p_i = 1$. *Ce résultat est général.*
2. Calculer l'espérance de la variable aléatoire $X$.

**Exercice 5:**
On note $X$ la variable aléatoire qui, à chaque jour, associe le nombre de voitures neuves vendues par un concessionnaire. Sa loi de probabilité est donnée par le tableau suivant:

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}(X = x_i)$ | 0,45 | 0,3 | 0,15 | $p$ |

1. Donner la probabilité $\mathbb{P}(X = 1)$.
2. Calculer $\mathbb{P}(X \leq 1)$.
3. Calculer le réel $p$.

**Exercice 6:**
Une entreprise de fournitures industrielles commercialise en particulier un certain modèle de pièces pour pompe hydraulique.
On appelle $X$ la variable aléatoire qui associe à chaque jour ouvrable tiré au hasard dans une année le nombre de pièces vendues. On admet que la loi de probabilité de la variable aléatoire $X$ est définie par le tableau suivant :

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}(X = x_i)$ | 0,10 | 0,16 | 0,25 | 0,3 | 0,13 | 0,05 | 0,01 |

1. Calculer l'espérance de la variable aléatoire $X$
2. Interpréter le résultat dans le contexte de l'expérience aléatoire $X$

**Exercice 7:**
Une urne contient trois boules, indiscernables au toucher, numérotées de 1 à 3.
Un jeu consiste à extraire successivement deux boules de l'urne, la première boule étant remise avant d'extraire la seconde.
On appelle tirage, tout couple $(a, b)$ où $a$ est le numéro de la première boule extraite et $b$ celui de la seconde.
On admet que tous les tirages sont équiprobables.

1. Préciser l'ensemble des neuf tirages possibles (on pourra s'aider d'un tableau).

2. Soit $X$ la variable aléatoire qui, à chaque tirage $(a, b)$, associe le produit $ab$.
   (a) Quelles sont les valeurs prises par $X$?
   (b) Présenter sous forme de tableau la loi de probabilité de $X$
   (c) Calculer l'espérance de $\mathbb{E}(X)$

**Exercice 8:**
Un commerçant vend entre 0 et 4 voitures d'un certain modèle en une semaine. Soit $X$ la variable aléatoire qui, à chaque semaine choisie au hasard parmi les 52 semaines d'une année, associe le nombre de voitures vendues cette semaine. $X$ suit la loi de probabilité ci-dessous :

| **Voitures vendues** | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}(X = k)$ | $0,26$ | $0,25$ | | $0,15$ | $0,05$ |

1. Calculer la probabilité de vendre exactement deux voitures en une semaine
2. Justifier que la probabilité de vendre au moins deux voitures en une semaine est égale à 0,51.
3. Calculer $\mathbb{P}(X \leq 2)$
4. Calculer l'espérance de cette variable aléatoire. En dduire une estimation du nombre moyen de voitures vendues en une année (c'est-à-dire 52 semaines).

**Exercice 9:**
Un sac contient un jeton marqué "2" et un jeton marqué "3". On tire un jeton, on note son numéro, on le remet dans le sac, puis on effectue de même un second tirage. Ondéfinit alors la variable aléatoire qui, à chaque partie, associe le produit des deux numéros obtenus.

1. Déterminer l'ensemble $\Omega$ des issues possibles de cette expérience puis l'ensemble $E$ des valeurs prises par $X$.
2. Décrire l'événement $\{X = 3\}$ et calculer sa probabilité.
3. Décrire l'événement $\{X < 8\}$ et calculer sa probabilité.

**Exercice 12:**
Un sondage effectué auprès de vacanciers révèle que 75% d'entre eux pratiquent la natation pendant leurs congés. On interroge succssivement et de façon indépendante quatre vacanciers pris au hasard. Le nombre de vacanciers est suffisamment grand pour que le choix des personnes soit assimilé à un tirage avec remise.

1. Construire un arbre de probabilités illustrant la situation.
2. On note $X$ la variable aléatoire correspondant au nombre de vacanciers pratiquant la natation. Calculer les probabilités suivantes :

   (a) $\mathbb{P}(X = 4)$ | (b) $\mathbb{P}(X = 0)$ | (c) $\mathbb{P}(x = 2)$ | (d) $\mathbb{P}(X < 4)$

**Exercice 13:**
On lance une pièce de monnaie truquée de telle manière que la probabilité de sortie de la face "pile" est $0,4$. Le joueur gagne 3 euros si le face visible est "pile", sinon il perd 2 euros. On note $X$ la variable aléatoire qui, à chaque lancer, associe le gain du joueur.

1. Etablir la loi de probabilité de $X$.
2. Calculer l'espérance de $X$.
3. Le jeu est-il équitable ? Justifier.

**Exercice 14:**
On considère la variable aléatoire $X$ qui, à chaque partie d'un jeu, associe le gain du joueur (positif si celui-ci gagne de l'argent, négatif sinon). Elle prend les valeurs $-5$, 3 et $a$. On a $\mathbb{P}(X = -5) = 0,6$ et $\mathbb{P}(X = a) = 0,1$.

1. Calculer la valeur de $\mathbb{P}(X = 3)$.
2. Exprimer l'espérance de $X$ en fonction de $a$.
3. Déterminer la valeur de $a$ à partir de laquelle le jeu est favorable au joueur.

**Exercice 15:**
On propose à Fatima de tirer une carte dans un jeu de 52 cartes. Si elle obtient un As, elle gagne 3 euros. Si elle obtient une figure, elle gagne 2 euros. Dans les autres cas, elle pard 1 euros. Le jeu est-il équitable ?

**Exercice 16:**
On a réalisé une étude statistique sur les performances d'une joueuse de basket professionnelle. Lorsqu'elle joue à domicile, cette joueuse réussit 68% de ses tirs mais seulement 42% lorsqu'elle joue à l'extérieur.

1. Cette joueuse dispute un match à domicile et elle effectue deux tirs d'affilés indépendants l'un de l'autre.
   (a) Effectuer un arbre de probabilité exprimant la situation.
   (b) Quelle est la probabilité que cette joueuse marque deux paniers ?
   (c) Quelle est la probabilité que la jouesue marque au moins un panier ?
2. Cette joueuse dispute un match à l'extérieur et elle effectue trois tirs successifs indépendants les uns des autres.

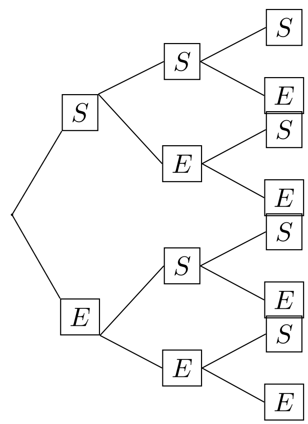
(a) Effectuer un arbre de probabilité exprimant la situation.

(b) Quelle est la probabilité que la joueuse ne marque aucun panier ?

(c) Quelle est la probabilité que la joueuse marque au plus deux paniers ?

**Exercice 17:**
On considère une épreuve admettant que deux issues : une nommée "succès" et notée S de probabilité 0,4 ; l'autre nommée "échec" et notée E.
On décide de répéter trois fois cette même épreuve. On obtient l'arbre de probabilité ci-dessous.
On suppose ces répétitions indépendantes entres elles.

1. Compléter cet arbre de probabilité.
2. (a) Combien de chemins comportent 3 succès ?
   (b) Donner la probabilité d'obtenir trois succès à l'issue de cette expérience aléatoire ?
3. (a) Combien de chemins comportent 0 succès ?
   (b) Donner la probabilité de n'obtenir aucun succès à l'issue de cette expérience aléatoire ?
4. (a) Combien de chemins comportent 2 succès ?
   (b) Donner la probabilité d'obetnir exactement deux succès à l'issue de cette expérience aléatoire ?




**Exercice 18:**
Soit $X \sim \mathcal{B}(6; 0,4)$, déterminer les probabilités suivantes :

1. $\mathbb{P}(X = 2)$
2. $\mathbb{P}(X = 0)$
3. $\mathbb{P}(X \leq 4)$
4. $\mathbb{P}(X \leq 6)$
5. $\mathbb{P}(X > 3)$
6. $\mathbb{P}(X \geq 5)$

**Exercice 19:**
Soit $X$ une variable aléatoire. Sachant que son espérance vaut $19,2$ et que sa variance vaut $3,84$, $X$ peut-elle suivre une loi binomiale ? Si oui, en déduire ses paramètres.

**Exercice 20:**
Soit $X \sim \mathcal{B}\left(5; \dfrac{1}{3}\right)$, calculer :

1. $\mathbb{P}(X = 1)$
2. $\mathbb{P}(X \geq 4)$
3. $\mathbb{P}(X < 3)$

**Exercice 21:**
On lance quatre fois une pièce équilibrée et on regarde sur quel côté elle tombe.

1. Quel est la probabilité de ne tomber aucune fois sur pile ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 2 piles ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir au plus 2 piles ?

**Exercice 22:**
Dans un petit service départemental d'incendie et de secours (SDIS) de la région Ile-de-France, la variable aléatoire $X$ donnant le nombre d'interventions quotidiennes suit la loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = 0,2$.

1. Déterminer la probabilité qu'il passe une journée sans aucune intervention.
2. Déterminer le nombre moyen d'interventions quotidiennes.
3. Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins 3 interventions journalières ?

**Exercice 23:**
A la fin d'un mois donné, on considère une liasse importante de factures. On note $E$ l'événement "une facture prémevée au hasard dans la liasse de factures est erronée". On suppose que $\mathbb{P}(E) = 0,03$.
On prélève au hasard 10 factures das la liasse pour vérification. La liasse contient assez de factures pour qu'un puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 10 factures. On considère la variable aléatoire $X$ qui, à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre de factures erronées de ce prélèvement.

1. Justifier que la variable aléatoire $X$ suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer la probabilité qu'aucune facture de ce prélèvement ne soit erronée.
3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au plus deux factures soient erronnées.

**Exercice 24:**
Une entreprise fabrique en série des machines à café. Un atelier produit $2,5\%$ de machines défectueuses. On prélève au hasard, dans la production de l'atelier, un lot de 10 machines. La production est suffisamment important pour que ce prélèvement soit assimilé à un tirage avec remise. On note $X$ la variable aléatoire qui, à chaque prélèvement de 10 machines, associe le nombre de machines défectueuses.

1. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $X$. Justifier la réponse.
2. Calculer la probabilité que le lot contienne exactement deux machines défectueuses.

**Exercice 25:**
On jette un dé cubique non truqué. La partie est gagnée si on obtient un 5 ou un 6. On joue 8 parties de suite. On considère la variable aléatoire $X$ qui, à toute série de 8 parties, associe le nombre de parties gagnées.

1. La variable aléatoire $X$ suit une loi binomiale. En déterminer les paramètres.
2. Calculer la probabilité de l'événement $E$ : "On gagne 6 parties".
3. Calculer la probabilité de l'événement $F$ : "On gagne 6, 7 ou 8 parties".

**Exercice 26:**
Dans une société, on assemble et on installe un certain type d'équipement informatique pour les sièges sociaux de grandes entreprises.
On considère une lot important d'équipements de ce type. On note $E$ l'événement "un équipement prélevé au hasard dans le lot est défectueux".
On suppose que $\mathbb{P}(E) = 0,025$.
On prélève au hasard 10 équipements dans le lot pour vérification. Le lot est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 10 équiepements. On considère la variable $X$ qui, à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre d'équipements défectueux de ce prélèvement.

1. Justifier que la variable aléatoire $X$ suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, il y ait exactement deux équipements défectueux.
3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, il y ait au plus deux équipements défectueux.

**Exercice 27:**
Une urne contient dix boules dont trois rouges. On tire huit boules l'une après l'autre en remettant à chaque fois la boule tirée dans l'urne. Cela constitue un prélèvement.
On suppose l'équiprobabilité des tirages.
Soit $X$ la variable aléatoire qui, à chaque prélèvement ainsi défini, associe le nombre de boules rouges obtenues.

1. Expliquer pourquoi $X$ suit une loi binomiale. Préciser les paramètres de cette loi.
2. Calculer $\mathbb{P}(x \leq 5)$.
3. Calculer l'espérance $\mathbb{E}(X)$ de la variable aléatoire $X$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'énoncé.

**Exercice 28:**
Une PME fabrique des boules de billard. Dans un stock de boules, 75% des boules sont blanches et le reste est rouge. On prélève au hasard 8 boules dans ce stock. Le stock est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 8 boules. On considère la variable aléatoire $X$ qui, à tout prélèvement de 8 boules, associe le nombre de boules blanches parmi les 8 boules.

1. Justifier que la variable aléatoire $X$ suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, il y ait exactement 6 boules blanches.
3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, il y ait au plus 7 boules blanches.
4. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, il y ait au moins 6 boules blanches.
5. Calculer l'espérance $\mathbb{E}(X)$ de la variable aléatoire $X$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'énoncé.

**Exercice 29:**
On s'intéresse ici à la fabrication dans une usine d'un grand groupe de l'industrie automobile d'un certain modèle de véhicules à moteurs hybrides.
On s'intéresse à un stock important de véhicules sortis des chaînes de montage de l'usine.
On appelle "véhicule défectueux" un véhicule possédant au moins un défaut. Il y a de nombreux défauts possibles à la sortie d'une chaîne de montage.
On note $E$ l'événement "un véhicule prélevé au hasard dans le stock est défectueux".
On suppose que $\mathbb{P}(E) = 0,2$.
On prélève au hasard 10 véhicules dans le stock pour vérification. On considère la varianle aléatoire $X$ qui, à tout prélèvement ainsi définie, associe le nombre de véhicules défectueux de ce prélèvement.

1. Justifier que la variable aléatoire $X$ suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer la probabilité qu'un seul véhicule de ce prélèvement soit défectueux.
3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au plus un véhicule soit défectueux.
4. Calculer l'espérance $\mathbb{E}(X)$ de la variable aléatoire $X$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'énoncé.