1 Fonction inverse

1.1 Compétences Attendues

- Étudier et représenter des fonctions obtenues par combinaisons linéaires de la fonction inverse et de fonctions polynomiales de degré au maximum 3.

1.2 Exercices

Exercice 1:
Déterminer la dérivée de la fonction f sur $]0;+\infty[$.

1. $f : x \mapsto -\dfrac{4}{x}$
2. $f : x \mapsto 3x + \dfrac{1}{x}$
3. $f : x \mapsto -\dfrac{3}{2}\left(3x + \dfrac{1}{x}\right)$
4. $f : x \mapsto \dfrac{7}{x}$
5. $f : x \mapsto -2x + 3 - \dfrac{1}{x}$
6. $f : x \mapsto 2x + 1 - \dfrac{3}{x}$
7. $f : x \mapsto -\dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{1}{x}\right)$
8. $f : x \mapsto x^2 + \dfrac{1}{x}$
9. $f : x \mapsto 2x^2 + x + 3 - \dfrac{4}{x}$
10. $f : x \mapsto x^3 + 2x^2 - x + 4 + \dfrac{7}{x}$

Exercice 2:
Justifier par un calcul détaillé l'expression de $f'(x)$.

1. $\forall x \in]0;+\infty[, f(x) = x + 60 + \dfrac{121}{x}, f'(x) = \dfrac{(x-11)(x+11)}{x^2}$
2. $\forall x \in]0;+\infty[, f(x) = 400x + \dfrac{490\ 000}{x}, f'(x) = \dfrac{400}{x^2}(x+35)(x-35)$
3. $\forall x \in]0;+\infty[, f(x) = 0,003x + 60 + \dfrac{48\ 000}{x}, f'(x) = \dfrac{0,003}{x^2}(x-4\ 000)(x+4\ 000)$

Exercice 3:
Soit $f : x \mapsto x - 3 + \dfrac{4}{x}$ définie sur $[1;8]$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Déterminer la fonction dérivée de f.
2. Etudier le signe de $f'(x)$.
3. En déduire le sens de variation de f.
4. Donner le tableau de variation de f.
5. Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$.
6. Tracer la tangente d à $\mathcal{C}_f$ en son point A d'abscisse 1 et la tangente d' à $\mathcal{C}_f$ en son point d'abscisse 4.
7. Donner une équation de d et de d'.

Exercice 4:
Soit $f : x \mapsto x - 6 + \dfrac{4}{x}$ définie sur $[1;10]$.

1. Montrer que pour tout $x \in [1;10]$,
$$f'(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{x^2}$$
.
2. Déterminer le signe de $f'(x)$ sur $[1;10]$ puis donner le tableau de variation de f.

Exercice 5:

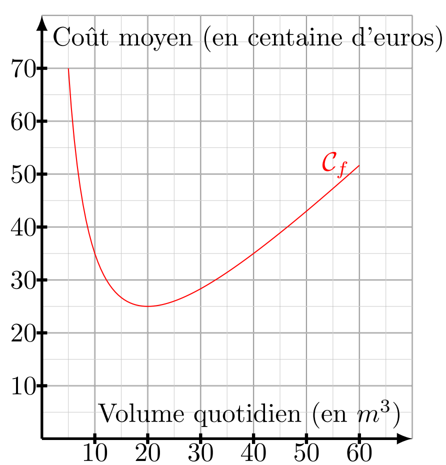
1. Soit $f : x \mapsto 2x + 4 + \dfrac{8}{x}$ définie sur $[0,5;4]$.
   (a) Déterminer la fonction dérivée f' de f.
   (b) Etudier le signe de $f'(x)$.
   (c) En déduire le sens de variation de f.
   (d) Donner le tableau de variation de f.
2. On se propose de construire un réservoir en tôle en forme de parallélépipède rectangle de longueur 2 m, de largeur x et de hauteur h dont le volume intérieur est 4 m^3.
   On admet que le volume du parallélépipède rectangle est donné par $V = h \times x \times 2$.
   (a) Déduire de l'information relative au volume une relation entre h et x.
   (b) Montrer que la somme des aires des faces intérieures (sans couvercle) s'écrit en fonction de x :
   $$S(x) = 2x + 4 + \frac{8}{x}$$
   (c) Déduire des résultats obtenus précédemment les valeurs de x et de h correspondant à une aire minimale.

Exercice 6:
Une entreprise fabrique chaque mois une quantité q d'un certain produit, en tonnes. Le coût total de production est donné en euros pour tout nombre q de l'intervalle $[10;100]$ par $C(q) = 3q^2 + 40q + 2\ 700$.
On définit le coût moyen unitaire de production par $C_m(q) = \dfrac{C(q)}{q}$.

1. Vérifier que pour tout $q \in [10;100]$, $C_m(q) = 3q + 40 + \dfrac{2\ 700}{x}$.
2. On désigne par C'_m la fonction dérivée de la fonction C_m sur $[10;100]$. Démontrer que $C'_m(q) = \dfrac{3(q-30)(q+30)}{q^2}$.
3. Etudier le signe de $C'_m(q)$.
4. Etablir le tableau de variation de la fonction C_m sur $[10;100]$.
5. Déterminer la valeur q_0 de q pour laquelle le coût moyen unitaire est minimal.

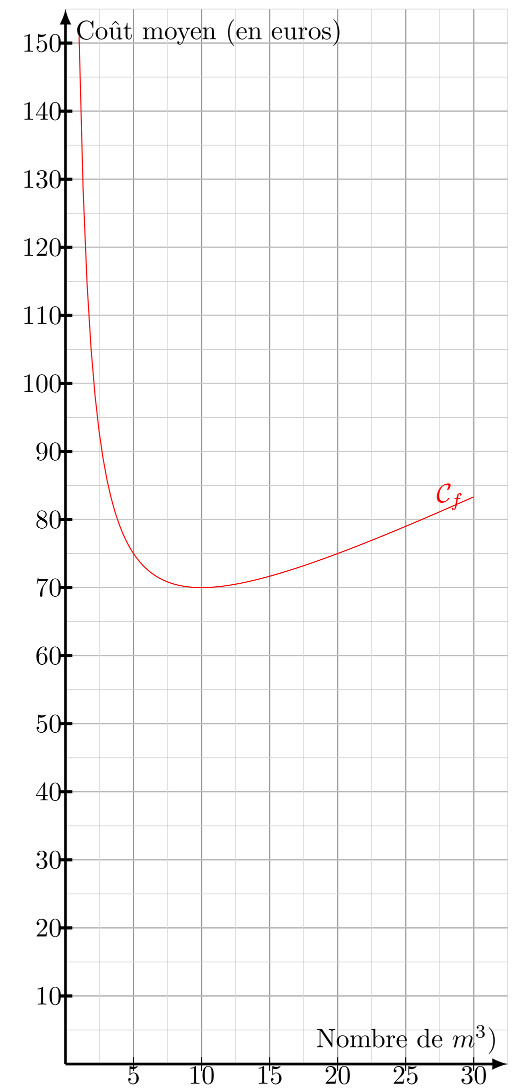
Exercice 7:
Une entreprise fabrique chaque jour un volume d'engrais biologique liquide compris entre 5 m^3 et 60 m^3.
Le coût moyen de production (en centaine d'euros) de cet engraisest modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $[5;60]$ par $f(x) = x - 15 + \dfrac{400}{x}$ où x est le voulme quotidien d'engrais fabriqué (en m^3). La représentation graphique $\mathcal{C}_f$ de la fonction f est donnée ci-dessous.

1. Calculer le coût moyen de la production de 50 m^3 d'engrais.
2. Déterminer graphiquement les volumes d'engrais correspondant à un coût moyen de fabrication inférieur ou égal à 3 500 euros.
3. Montrer que, pour tout $x \in [5;60]$, $f'(x) = \dfrac{x^2 - 400}{x^2}$.
4. Etudier le signe de $x^2 - 400$ pour $x \in [5;60]$.
5. En déduire les variations de la fonction f sur $[5;60]$.
6. Pour quel volume d'engrais fabriqué le coût moyen de production est-il minimal ? Quel est ce coût minimal?



Exercice 8:
Une entreprise fabrique chaque jour un produit chimique liquide. La production est comprise entre 0 et 30 m^3 par jour. Toute la production est vendue.

1. On considère la fonction $C : x \mapsto x^2 + 50x + 100$ définie sur $[1;30]$ représentant le coût de production en fonction de m^3 fabriqués.
   (a) Quel est le coût de production, en euros, de 10 m^3 ?
   (b) Calculer le coût unitaire, en euros, pour 10 m^3 produits.
2. On note pour tout $x \in [1;30]$, $f(x) = \dfrac{C(x)}{x}$ la coût unitaire. On donne la représentation graphique de la fonction f.
   (a) Déterminer graphiquement une valeur approchée de $f(5)$ et de $f(25)$.
   (b) D'après le graphique, pour quantité de m^3 produits, le coût unitaire, en euros, est-il inférieur ou égal à 80 ?
3. (a) Démontrer que pour tout $x \in [1;30]$ $f(x) = x + 50 + \dfrac{100}{x}$.
   (b) Démontrer que pour tout $x \in [1;30]$, $f'(x) = \dfrac{(x-10)(x+10)}{x^2}$.
   (c) Déterminer le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[1;30]$ et dresser le tableau de variation de f.
   (d) Préciser la quantité de m^3 de liquide à fabriquer par jour pour que le coût unitaire soit minimal. Quel est ce coût minimal?



Exercice 9:
On se propose de fabriquer avec le moins de tôle possible un conteneur en forme de parallélépipède rectangle de longueur 6 m, de largeur x et de hauteur h dont le volume intérieur est $37,5\ m^3$.

1. On admet que le volume du parallélépipède est $V = h \times x \times 6$. Déduire de l'information relative au volume une expression de h en fonction de x.
2. Montrer que l'aire totale du conteneur (c'est-à-dire la somme des aires des six faces) s'écrit en fonction de x :
$$S(x) = 12x + 12,5 + \frac{75}{x}$$
3. (a) Démontrer que pour tout $x \in [0,5; 6]$,
$$S'(x) = \frac{12(x-2,5)(x+2,5)}{x^2}$$
.
   (b) Etablir le tableau de variation de S sur $[0,5; 6]$.
   (c) En déduire les valeurs de x et h correspondant à une aire minimale.

Exercice 10:

1. Soit $f : x \mapsto 2x - 230 + \dfrac{7\ 200}{x}$ définie sur $[30; 120]$.
   (a) Montrer que pour tout $x \in [30; 120]$,
$$f'(x) = \frac{2(x-60)(x+60)}{x^2}$$
.
   (b) Etudier le signe de $f'(x)$ puis construire le tableau de variation de f sur $[30; 120]$.
2. Dans un restaurant, le coût moyen unitaire de fabrication de x repas, exprimé en euros, est donné par la relation :
$$C_M(x) = 2x - 230 + \frac{7\ 200}{x} \quad \text{pour} \quad x \in [30; 120]$$
   (a) En utilisant les résultats précédents, déterminer le nombre de repas qui donne un coût moyen unitaire minimal. Quel est ce coût ?
   (b) Montrer que le coût total de fabrication de x repas, exprimé en euros, est donné par la relation :
$$C(x) = 2x^2 - 230x + 7\ 200$$
   (c) Le restaurateur propose le repas au prix de 35 euros.
      i. Calculer le bénéfice $B(x)$ réalisé en fonction du nombre x de repas servis.
      ii. Calculer le bénéfice réalisé pour 60 repas servis.