1 Statistiques

1.1 Compétences Attendues

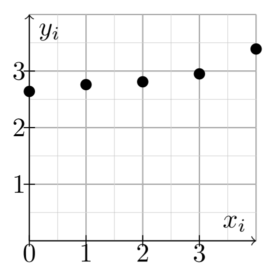
- Représenter un nuage de points.
- Déterminer et utiliser un ajustement affine pour interpoler ou extrapoler des valeurs inconnues.
- Représenter un nuage de points en effectuant un changement de variable donné (par exemple u^2, $\frac{1}{t}$, $\frac{1}{\sqrt{n}}$, $\log(y)$,...) afin de conjecturer une relation de linéarité entre de nouvelles variables.

1.2 Exercices

Exercice 1:
Le tableau ci-dessous rend compte de l'évolution du prix (en euros) du m^3 d'eau, dans une ville entre 2015 et 2019:

Année	**2015**	**2016**	**2017**	**2018**	**2019**
Rang de l'année : x_i	0	1	2	3	4
Prix en euros de m^3 **d'eau :** y_i	$2,64$	$2,76$	$2,81$	$2,95$	$3,39$

1. Calculer le pourcentage d'augmentation du prix entre 2015 et 2019. Arrondir à $0,1\%$ près.
2. Le nuage de points associé à cette série statistique est représenté ci-dessous :



   (a) Choisir une droite d'ajustement de ce nuage. Donner son équation.
   (b) Quelle estimation du prix en euros (arrondi au centième d'euro) du m^3 d'eau peut-on en déduire pour 2023 ?
3. Avec un tableur, on a obtenu la droite d'ajustement d'équation $y = 0,17x + 2,57$. Reprendre la question du 2.(b).

Exercice 2:
Une entreprise étudie l'évolution de la proportion de cadres parmi ses employés pendant huit années consécutives. Le tableau suivant donner la proportion de cadres, en pourcentage, pour chacune de ces huit années.

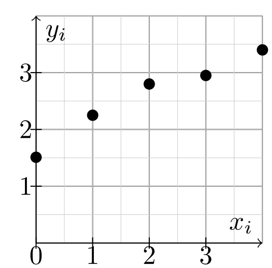
Rang de l'année : x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
Proportion des cadres en pourcentage : y_i	$11,9$	$14,2$	15.8	$18,1$	$19,6$	$20,3$	$21,2$	$22,9$

1. Dans un repère orthonormé d'unité graphique 1 cm, représenter le nuage des points M_i de coordonnées $(x_i; y_i)$. Graduer à l'axe des ordonnées à partir de 10.
2. On nomme G le point moyen du nuage de points.
   (a) Calculer les coordonnées du point G et placer ce point sur le graphique.
   (b) Tracer sur le graphique une droite $\mathcal{D}$ passant par G qui réalise un bon ajustement affine du nuage de points.
   (c) Déterminer une équation de la droite $\mathcal{D}$.
3. On réalise, à l'aide de la droite $\mathcal{D}$, un ajustement affine du nuage représenté. Utiliser l'équation de la droite $\mathcal{D}$ pour estimer:
   (a) La proportion de cadres, sous forme de pourcentage parmi les employés de l'entreprise l'année de rang 9.
   (b) Le rang de l'année à partir de laquelle la proportion de cadres parmi les employés de l'entreprise dépasserait 30%.

Exercice 3:
Le tableau suivant rend compte de l'évolution du prix (en euros) du kilogramme d'une matière première utilisée dans l'industrie pharmaceutique, pendant cinq années consécutives.

Rang de l'année : x_i	0	1	2	3	4
Prix en euros ddu kg : y_i	$1,51$	$2,25$	$2,80$	$2,95$	$3,40$

1. Calculer le pourcentage d'augmentation du prix entre l'année de rang 0 et l'année de rang 4. Donner le résultat arrondi à $0,1\%$.
2. Le nuage de point associé à cette série statistique est représenté ci-dessous.

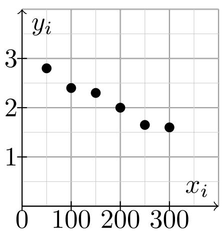


   (a) Choisir une droite d'ajustement de ce nuage. Donner son équation.
   (b) Quelle estimation en euros du kilogramme de matière première peut-on en déduire pour l'année de rang 6 ?
   (c) Avec un tableau, on a obtenu une droite d'ajustement d'équation $y = 0,487x + 1,647$. Reprendre la question 2.(b).

Exercice 4:
Le tableau suivant donne le prix de vente d'un article en fonction de la quantité commandée.

Quantité commandée : x_i	50	100	150	200	250	300
Prix en milliers d'euros : y_i	$2,8$	$2,4$	$2,3$	2	$1,65$	$1,6$

Le nuage de point correspondant est représenté ci-dessous.



1. Calculer les coordonnées du point moyen G de ce nuage de points.
2. Reproduire la figure. On donne le point $A(250; 1,75)$. Placer les points G et A. Tracer la droite (AG).
3. On admet que la droite (AG) est une droite d'ajustement du nuage.
   (a) Déterminer graphiquement une estimation du prix de vente d'un article si on en commande 230. Faire apparaitre les tracés utiles.
   (b) On admet qu'une équation de (AG) est $y = 3 - 0,005x$. Retrouver par le calcul l'estimation demandée au 3.(a).

Exercice 5:
Le tableau suivant donne les dépenses en santé, en milliards d'euros, d'un pays pour quatre années consécutives.

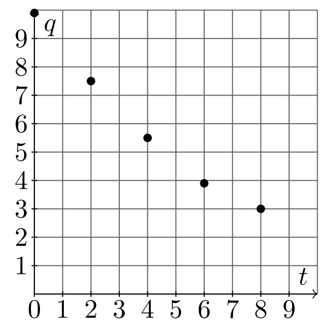
Rang de l'année : x_i	1	2	3	4
Dépenses en milliards d'euros : y_i	$64,34$	$69,07$	$74,84$	$80,94$

1. Représenter graphiquement le nuage de points associé à la série $(x_i; y_i)$ dans un repère orthogonal.
2. On désigne par A et B les points de coordonnées $(1; 64,34)$ et $(4; 80,94)$. On décide de prendre comme droite d'ajustement du nuage la droite (AB).
   (a) Déterminer une équation de la droite (AB) sous la forme $y = ax + b$. Arrondir a et b à 10^{-2}.
   (b) Déduire de la question précédente une prévision des dépenses pour l'année de rang 5.

Exercice 6:
Un médicament est injecté par voie intraveineuse. Dans les heures qui suivent, la substance est éliminée par les reins. La quantité q_i présente dans le sang (en mg) à l'instant t_i (en heures) a été mesurée par des prises de sang toutes les deux heures :

t_i	0	2	4	6	8
q_i	$9,9$	$7,5$	$5,5$	$3,9$	3

Le nuage de points associé à la série statistique $(t_i; q_i)$ est représenté ci-dessous.



1. On désigne par G le point moyen du nuage. Calculer les coordonnées du point G.
2. On désigne par A le point du nuage de coordonnées $(8; 3)$.
   (a) Construire la droite (AG) sur la figure, après l'avoir reproduite.
   (b) Démontrer qu'une équation de la droite (AG) est : $y = -0,74x + 8,92$.
3. On décide de prendre la droite (AG) comme droite d'ajustement affin du nuage. On admettant que l'évolution observée se poursuit
   (a) Utiliser l'ajustement affine pour estimer la quantité de médicament présente dans le sang au bout de 5 heures.
   (b) Utiliser l'ajustement affine pour estimer la quantité de médicament présente dans le sang au bout de 10 heures.

Exercice 7:
Le tableau suivant donne la population d'une ville nouvelle entre les années 1985 et 2015 :

Rang de l'année : x_i	0	5	10	15	20	25	30
Population en milliers d'habitants : y_i	18	21	25	30	36	42	50

1. Représenter le nuage de points associé à ce tableau dans un repère orthonormé. On prendra comme unité graphique 1 cm pour 5.
2. Soit $A(5; 21)$ et $B(25; 42)$. Déterminer une équation de la droite (AB).
3. (a) Expliquer pourquoi on peut prendre la droite (AB) comme droite d'ajustement du nuage.
   (b) Déduire de cet ajustement une estimation de la population en 2025.

Exercice 8:
Le tableau suivant donne l'évolution des ve,tes de lait, en hectolitres, dans une région pendant cinq annés consécutives.

Rang de l'année : x_i	1	2	3	4	5
Vume des ventes : y_i	114 671	114 772	114 394	115 621	116 321

1. On considère le nuage de de points $M_i(x_i; y_i)$ dans un repère orthogonal. Déterminer les coordonnées $(\bar{x}; \bar{y})$ du point moyen de ce nuage.

2. On ajuste le nuage de points précédent par la droite Δ d'équation $y = 414,9x + p$. Déterminer p pour que la droite Δ passe par le point G.

3. A l'aide de l'équation obtenue précédemment, estimer le volume des ventes l'année de rang 6. Arrondir à l'unité.

Exercice 9:
Dans un lycée il y a 1 280 élèves. Dès l'apparition des premiers symptômes de l'épidémie, l'infirmière du lycée pendant 8 jours le nombre d'élèves malades. Le tableau ci-dessous indique les résultats observés.

Rang du jour : x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombres d'élèves grippés : y_i	2	5	9	14	17	23	27	31

1. Construire dans un repère orthogonal le nuage de points associés à cette série statistique. On prendra les unités suivantes : en abscisse, 2 cm pour 1 jour, 1 cm pour deux élèves.

2. Calculer les coordonnées du point moyen G et le placer sur le graphique.

3. On admet que la droite $\mathcal{D}$ passe par G et de coefficient directeur 4,26 constitue une droite d'ajustement convenable du nuage. Déterminer une équation de $\mathcal{D}$ de la forme $y = 4,26x + b$.

4. En utilisant cet ajustement, estimer à partir de combien de jours au moins 5% des élèves du lycée seront atteints par la grippe.

Exercice 10:
Avant de partir en vacances, une personne entreprend un régime afin de perdre du poids, en suivant les conseils d'un nutritionniste. Elle se pèse régulièrement à la fin de chaque semaine de régime, le même jour, à la même heure. Elle note l'évolution de son poids dans le tableau suivant.

Rang de la semaine : x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
Poids en kg : y_i	63	62,6	61,4	61	61,2	60,6	60,4	59,8

1. Représentier le nuage de points $M_i(x_i : y_i)$ associé à cette série statistique dans un repère orthogonal en prenant 1,5 cm pour 1 semaine et 5 cm pour 1 kg. Graduer l'axe des abscisses à partir de 0 et l'axe des ordonnées à partir de 59.

2. Déterminer les coordonnées du point moyen G du nuage et la placer sur le graphique.

3. Soit $\mathcal{D}$ une droite d'équation $y = -0,42x + p$. Déterminer le nombre p sachant que $\mathcal{D}$ passe par G.

4. On admet que la droite d'équation $y = -0,42x + 63,14$ constitue un bon ajustement affine du nuage de points pendant 10 semaines.

5. Construire cette droite sur le graphique.

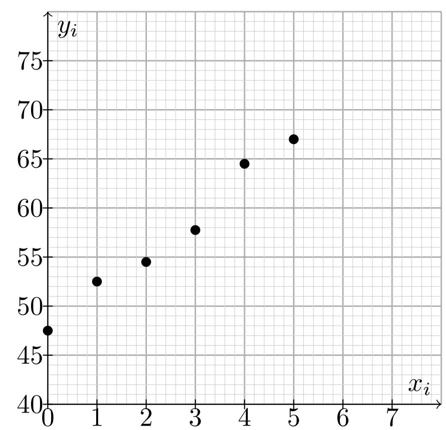
6. La personne voudrait atteindre le poids de 59 kg. Si son régime dure 9 semaines, selon les conditions ci-dessus, aura-t-elle atteint son objectif ? Justifier en vous aidant du graphique.

7. Retrouver le résultat de la question précédente en résolvant l'inéquation :
$-0,42x + 63,14 \leq 59$.

Exercice 11:
Le tableau ci-dessous donne la dépense médicale en soins hospitaliers entre 2014 et 2019, dans un pays de l'Union européenne, en milliards d'euros.

Rang de l'année : x_i	0	1	2	3	4	5
Dépense en soins hospitaliers : y_i	47,6	52,7	54,8	58	64,3	67,1

Le nuage de points de coordonnées $(x_i; y_i)$ est représenté ci-dessous, où la graduation en ordonnée débute à 40 milliards.



1. Déterminer les coordonnées, arrondies au dixième, du point moyen G. Placer le point G sur le graphique après l'avoir reproduit.

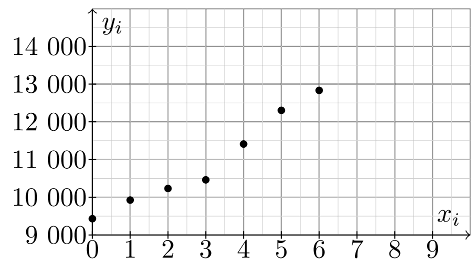
2. On souhaite réaliser un ajustement affine. A l'aide d'un logiciel, on a obtenu une droite d'ajustement $\mathcal{D}$ d'équation $y = 3,9x + 47,67$. Tracer la droite $\mathcal{D}$ sur le graphique.

3. En supposant que le modèle reste valables dans les trois années suivantes, prévoir la dépense en soins hospitaliers en 2022. Indiquer la méthode utilisée.

Exercice 12:
On s'intéresse aux dépenses engendrés par la gestion des déchets dans un pays de l'Union européenne. Le tableau ci-dessous présente les données pendant six années consécutives.

Rang de l'année : x_i	0	1	2	3	4	5	6
Dépense : y_i	9 432	9 926	10 233	10 462	11 411	12 304	12 833

Le nuage de points de coordonnées $(x_i; y_i)$ est donné ci-dessous.



1. Calculer les coordonnées du point G de ce nuage.
2. On décide d'ajuster le nuage avec la droite $\mathcal{D}$ d'équation : $y = 575,3x + 9\ 217,1$.
   (a) Tracer la droite $\mathcal{D}$ sur le graphique après l'avoir reproduit.
   (b) Vérifier que le point G appartient à la droite G.
   (c) En utilisant cet ajustement affines, estimer la dépense engendrée par la gestion des déchets l'année de rang 10.
3. Au cours de quelle année, la dépense atteindra-t-elle 14 milliards d'euros ?

Exercice 13:
Le tableau suivant donne l'évolution de la population d'une ville pendant huit années consécutives.

Rang de l'année : x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
Population : y_i	149	$157,5$	170	174	177	191	$198,5$	207

1. Représenter le nuage de points $M_i(x_i; y_i)$ dans un repère orthogonal en utilisant 2 cm pour l'unité d'abscisse et 1 cm pour 5 unités en ordonnée en partant de 140.
2. Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage de points.
3. Construire la droite $\mathcal{D}_\infty$ d'équation $y = 8x + 150$ et la droite $\mathcal{D}_2$ d'équation $y = 10x + 143$. Vérifier par le calcul que ces deux droites passent par le point G.
4. Laquelle de ces deux droites ajuste au mieux le nuage de points ? En utilisant la droit choisie, quelle population peut-on prévoir pour l'année de rang 10 ?

Exercice 14:
Le tableau ci-dessous donne l'évolution de la population d'une ville moyenne au cours des 5 dernières années.

Rang de l'année : x_i	0	1	2	3	4
Nombre de milliers d'habitants : z_i	58	$59,04$	$59,88$	$60,55$	$61,1$
$y_i = z_i - 58$	0	$1,04$	$1,88$	$2,55$	$3,1$

Le plan est muni d'un repère orthonormé d'unités graphiques 2,5 cm en abscisse pour 1 millier d'habitants en ordonnées.

1. Représenter le nuage de points associée à la série statistique $(x_i; y_i)$.
2. On prend pour modèle d'ajustement la droite Δ d'équation $y = 0,771x + 0,172$. Construire la droit Δ.
3. Calculer unes estimation de la population de cette ville pour l'année de rang 6.

Exercice 15:
Le tableau ci-dessous donne le nombre n estimé de personnes nouvellement contaminées par une épidémie dans une région pendant six semaines consécutives de mi-février à début avril.

Numéro de la semaine : x_i	1	2	3	4	5	6
Nombre de nouveaux contaminés : n_i	16 650	11 620	8 100	5 660	3 950	2 750

L'allure du nuage des points $M_i(x_i; n_i)$ ne justifiant pas un ajustement affine, on effectue un changement de variable en posant $y_i = \log(n_i)$.

1. Calculer les six valeurs de $y_i = \log(n_i)$. Arrondir à $0,01$.
2. Représenter le nuage de points $N_i(x_i; y_i)$ dans un repère où les axes se coupent au point $A(7; 3)$ avec pour unités 1cm en abscisse et 10 cm en ordonnée.
3. Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage des points N_i et placer G sur le nuage.
4. On choisit de prendre comme ajustement affine la droite passant par le point G et le point N_6. Déterminer l'équation de cette droite de la forme $y = mx + p$.
5. En utilisant cette équation, évaluer le nombre de personnes nouvellement contaminées la semaine numéro 15 si la tendance observée se prolonge.

Exercice 16:
Le tableau suivant donne le chiffre d'affaires mondial d'une entreprise entre 2013 et 2019 en millions d'euros.

Rang de l'année : x_i	0	1	2	3	4	5	6
Chiffre d'affaires : y_i	$18,3$	$20,1$	$23,3$	$25,3$	$27,8$	$30,6$	$32,4$

1. Représenter le nuage de points $M_i(x_i; y_i)$ dans un repère avec pour unités : 1cm poure 1 en abscisse et 1cm pour 5 en ordonnée.
2. (a) A l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur, donner une équation de la droite d'ajustement affine de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés. Les coefficients sont à arrondir au centième.

(b) Dans la suite, on choisit la droite d d'équation $y = 2,4x + 18,1$ comme ajustement affine du nuage de points. Tracer la droite d sur le graphique.

3. En supposant que cet ajustement demeure valable pendant plusieurs années, estimer le chiffre d'affaires de cette entreprise en 2020.

Exercice 17:
Pour les habitants d'une grand métropole, le temps moyen quotidien, en heures, passé par une personne devant un écran d'ordinateur, de tablette ou de smartphone est donné dans le tableau suivant entre 2015 et 2019 :

Rang de l'année : x_i	0	1	2	3	4
Temps en heures : y_i	$2,78$	$3,27$	$3,52$	$3,77$	$3,97$

1. Représenter le nuage de points $M_i(x_i; y_i)$ dans un repère avec pour unités : 1cm pour 1 en abscisse et 1cm pour 1 en ordonnée.

2. A l'aide de la calculatrice, déterminer une équation de la droite d'ajustement de y en x par la méthode des moindres carrés.

3. Dans la suite de l'exercice, on prend la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 0,3x+2,9$ comme droite d'ajustement du nuage de points.

   (a) Tracer la droite $\mathcal{D}$ sur le graphique.

   (b) En utilisant cet ajustement, déterminer une estimation du temps quotidien passé devant un écran à l'année de rang 6.

   (c) D'apèrs ce modèle, en quelle année va-t-on atteindre les 5 heures devant un écran ?

Exercice 18:
La vitamine B12 est une vitamine essentielle au fonctionnement normal du cerveau, du système nerveux et à la formation du sang. Sa concentration dans le sang se mesure en picogramme par millilitre (pg/ml). Le tableau ci-dessous donne l'évolution sur plusieurs semaines de la concentration en vitamine B12 dans le sang d'une personne qui, se plaignant d'une fatigue persistante, reçoit chaque jour une injection de cette vitamine.

Durée écoulée en semaine : t_i	0	1	3	5	7	9
Concentration en vitamine B12 : y_i	100	104	118	128	141	156

L'allure du nuage des points $M_i(t_i; y_i)$ ne justifiant pas un ajustement affine, on effectue un changement de variable en posant $z_i = \log(y_i)$.

1. Calculer les six valeurs de $z_i = \log(y_i)$.

2. A l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur, déterminer une équation de la droite d'ajustement de z en t obtenue par la méthode des moindres carrés sous la forme $z = at + b$.

3. On prend pour modèle d'ajustement la droite d'équation $z = 0,02t + 2$. Quelle serait, selon ce modèle, la durée nécessaire pour que la concentration en vitamine B12 dans le sang devienne supérieure à 500 pg/ml, permettant ainsi de faire disparaître les symptômes de fatigue ?

Exercice 19:
Une bactérie est apparue en août 2018 chez un ostréiculteur. Le tableau ci-dessous donne la quantité d'huîtres (en tonnes) contaminées par la bactérie chez cet ostréiculteur pendant dix mois consécutifs d'août 2018 à mai 2019.

Rang du mois : x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Huîtres contaminées : y_i	20	210	320	390	440	480	510	540	560	570

L'allure du nuage des points $M_i(x_i; y_i)$ ne justifiant pas un ajustement affine, on effectue un changement de variable en posant $z_i = \dfrac{750}{750 - y_i}$.

1. Calculer les dix valeurs de z_i.

2. Représenter le nuage des dix points $N_i(x_i; z_i)$ dans un repère un prenant pour unités graphiques 1 cm en abscisse et 4 cm en ordonnée.

3. Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage des points N_i et placer G sur le graphique.

4. A l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur, déterminer une équation de la droite d'ajustement de z en x obtenue par la méthode des moindres carrés sous la forme $z = ax + b$. Tracer cette droite dans le repère.

5. Déterminer avec ce modèle d'ajustement la quantité d'huîtres affectées par la bactérie en décembre 2019, le mois de décembre étant la période de vente la plus important pour un ostréiculteur. Arrondir à la dizaine de tonnes.

Exercice 20:
Le tableau ci-dessous décrit l'évolution d'une culture microbienne au cours du temps.

Nombre d'heures : t_i	2	3	4	5	6	8
Nombre de milliers de microbes : x_i	$0,9$	$1,5$	$2,5$	4	$6,7$	18

L'allure du nuage des six points $M_i(t_i; x_i)$ ne justifiant pas un ajustement affine, on effectue un changement de variable en posant $y_i = \log(x_i)$.

1. Calculer les six valeurs de $y_i = \log(x_i)$.
2. Représenter le nuage des six points $N_i(t_i; y_i)$ dans un repère avec pour unités 1cm en abscisse et 10cm en ordonnée.
3. Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage des points N_i et placer G sur le graphique.
4. On choisit de prendre comme ajustement affine une droite d'équation $y = 0,22t + b$. Déterminer la valeur de b arrondie à $0,01$ pour que la droite passe par le point G.
5. En utilisant cette équation, évaluer le nombre de microbes présents dans le milieu de culture au bout de 10 heures si la tendance observée se prolonge. Arrondir au millier.

Exercice 21:
Le tableau ci-dessous donne le nombre de nuitées (en milliers) dans l'hôtellerie dans une grand région touristique au mois de janvier, entre 2015 et 2019.

Rang de l'année : x_i	0	1	2	3	4
Nombre de milliers de nuitées : y_i	310	$323,7$	$339,4$	$347,9$	$368,9$

1. (a) Calculer le taux d'évolution global du nombre de nuitées au mois de janvier entre 2015 et 2019.
   (b) Calculer le taux d'évolution annuel moyen du nombre de nuitées au mois de janvier entre 2015 et 2019. Arrondir à $0,01\%$
2. (a) Représenter le nuage des cinq points $M_i(x_i; y_i)$ dans un repère où les axes se coupent au point $A(0; 300)$ avec pour unités : 1cm pour 1 en abscisse et 1cm pour 10 en ordonnée.
   (b) Calculer les coordonnées du point moyen G de ce nuage de points.
   (c) Dans la suite, on décide de prendre comme droite d'ajustement de y en x la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 14x + 310$.
      i. Tracer la droite $\mathcal{D}$ sur le graphique.
      ii. Estimer le nombre de nuitées dans cette région au mois de janvier 2022.