# Chapitre 1 : Généralités sur les fonctions

# Table des matières



## Contenu

- Différents modes de représentation d'une fonction : expression littérale, représentation graphique.
- Notations $y = f(x)$ et $x \mapsto f(x)$.
- Taux de variation, entre deux valeurs de la variable $x$, d'une grandeur $y$ vérifiant $y = f(x)$.
- Fonctions monotones sur un intervalle, lien avec le signe du taux de variation.

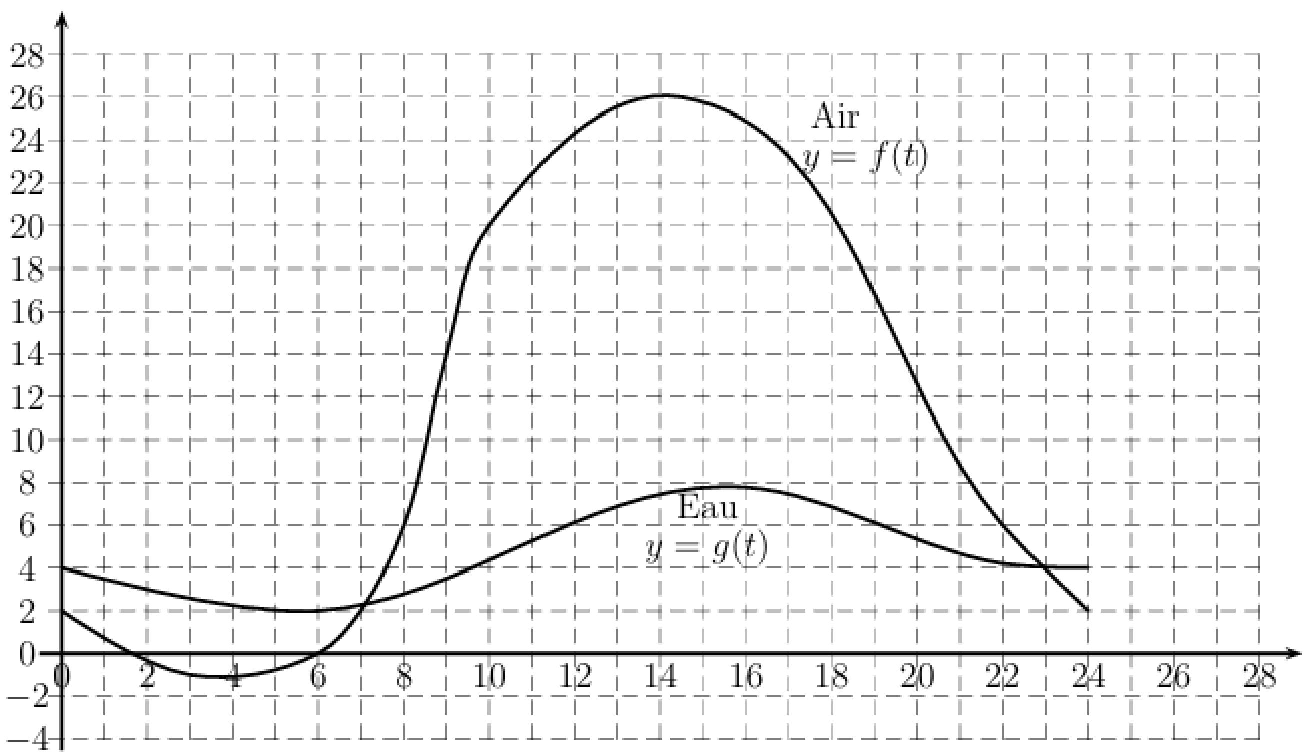
Exercice:
A l'aide du graphique ci-dessous représentant les relevés des températures de l'eau et de l'air, au bord d'un lac de montagne, pendant 24 heures.
On désigne respectivement par $f$ et par $g$ les fonctions mesurant la température en degré Celsius de l'air et de l'eau, en fonction du temps exprimé en heures et désigné par la variable $t$.

1. Traduire en langage courant les phrases suivantes :

| Langage mathématiques | Langage courant |
|---|---|
| $f(17) = 24$ | A 17h, la température de l'air était de 24°C. |
| L'image de 6 par $g$ est 2. | A 6h, la température.... |
| Quels sont les antécédents de 14 par la fonction $f$? | A quelle heure.............? |
| Le maximum de la fonction $f$ est 26 | |
| Si $1 < t < 6$, alors $f(t) < 0$ | Entre 1h et 6h... |
| $f(7) = g(7)$ | A 7h,..... |
| Résoudre $f(t) = g(t)$. | |
| $f$ est strictement décroissante sur $[14; 24]$. | |

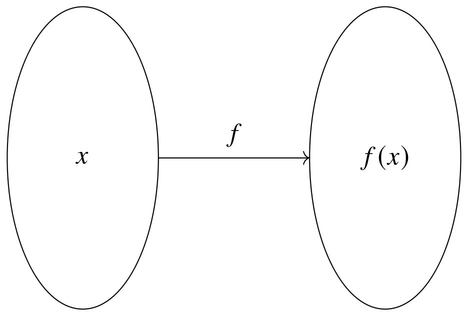
2. Traduire en langage mathématiques les phrases suivantes :

| Langage mathématiques | Langage courant |
|---|---|
| A minuit, la température de l'eau était de 4°C. | |
| A quelle heure la température de l'eau est-elle de 4°C? | |
| A 8h, la température de l'eau était inférieure à celle de l'air. | |
| A quelles heures la température de l'air est-elle supérieure à celle de l'eau ? | |
| La température minimale de l'eau est de 2°C. | |
| Entre 6h et 15h, la température de l'eau monte. | |



# 1 Notions de fonction, d'image et d'antécédent

**Définition**:
Définir une fonction $f$ sur un ensemble de réels $\mathcal{D}_f$, c'est associer à chaque réel $x \in \mathcal{D}_f$ un réel $y$.
Afin de bien comprendre que $y$ dépend de $x$, on le note donc $y = f(x)$.




**Notation et vocabulaire**:

- On appelle domaine de définition de $f$, noté $\mathcal{D}_f$, l'ensemble des valeurs sur lequel $f$ est définie.
- On note $f : x \mapsto f(x)$ ,la fonction qui à $x$ associe $f(x)$. $y = f(x)$ est l'image de $x$, $x$ est un antécédent de $y$.
- On appelle courbe représentative d'une fonction $f$ dans le plan, notés $C_f$, l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $x \in \mathcal{D}_f$ et $y = f(x)$

**! Remarque IMPORTANTE**

Il ne faut pas confondre $f$ et $f(x)$ ! $f$ représente une fonction tandis que $f(x)$ représente un nombre réel.

**! Remarque**

L'ensemble de définition d'une fonction, définie par une expression, est l'ensemble des valeurs pour lesquelles le calcul d'une image a un sens. Il n'existe que deux cas (en classe de Seconde) où le calcul n'est pas possible : la division par 0 et la racine carré d'un nombre négatif.

Exercice:
Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes :

- $f_1 : x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$ ;
- $f_2 : x \mapsto \dfrac{3x}{x^2-1}$ ;
- $f_3 : x \mapsto \dfrac{x-1}{x^2+1}$ ;
- $f_4 : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ ;
- $f_5 : x \mapsto \sqrt{x-1}$ ;
- $f_6 : x \mapsto \sqrt{2-x^2}$ ;

**! Remarque importante**

On a deux manières de comprendre une fonction : une expression algébrique ou un graphique. Exemple : la fonction carré/cube/...

**Méthode**:

- Pour déterminer une image d'un réel $a$ :
  - Graphiquement :

    On place $a$ sur l'axe des abscisses, on prend le point de la courbe d'abscisse $a$ et on lit son ordonnée.

  - Algébriquement :

    On remplace tous les $x$ par $a$ dans l'expression algébrique de $f$.

- Pour déterminer un antécédent d'un réel $k$ :
  - Graphiquement :

    On se place en $k$ sur l'axe des ordonnées, on prend le ou les points de la courbe d'ordonnée $k$ et on lit leurs abscisses.

  - Algébriquement :

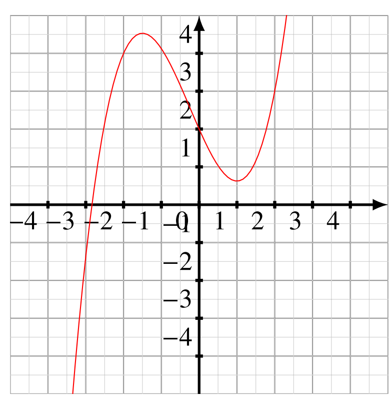
    On cherche toutes les valeurs de $x \in \mathcal{D}_f$ telles que $f(x) = k$.

Exercice :
Soit $f : x \mapsto x^2 + 1$.

1. Quel est le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de $f$ ?
2. Calculer l'image de 3 par $f$.
3. Calculer le (ou les) antécédent(s) de 10 par $f$.

Exercice:

Soit la représentation graphique $C_f$ d'une fonction $f$ ci-dessous.




1. Quel est le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de $f$ ?
2. a. Déterminer l'image de 2 par $f$.

   b. Déterminer $f(-2)$.
3. Calculer le (ou les) antécédent(s) de 2 par $f$.

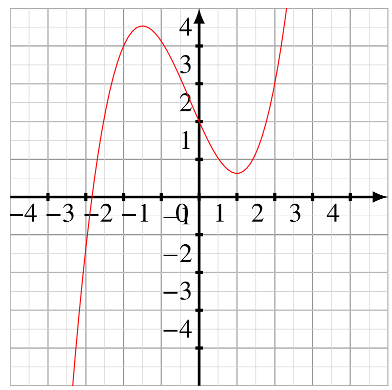
## 2 Résolutions graphiques

**Méthode**:

- Résoudre une équation $f(x) = k$ revient à déterminer les antécédents de $k$ par la fonction $f$.
- Résoudre une inéquation $f(x) \geq k$ (respectivement $f(x) \leq k$) revient à déterminer les points de la courbe de $f$ dont l'ordonnée est supérieure (respectivement inférieure) à $k$ puis l'ensemble de leurs abscisses.

Exercice:

Soit la représentation graphique $C_f$ d'une fonction $f$ ci-dessous.

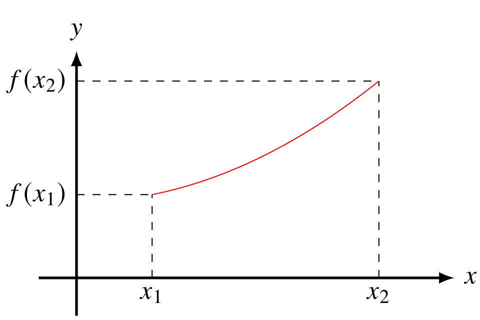


1. Déterminer la (ou les) solution(s) de $f(x) = -2$
2. Déterminer la (ou les) solution(s) de $f(x) = 4$
3. Déterminer les solutions de $f(x) < 0$.
4. Déterminer les solutions de $f(x) \geq 2$.

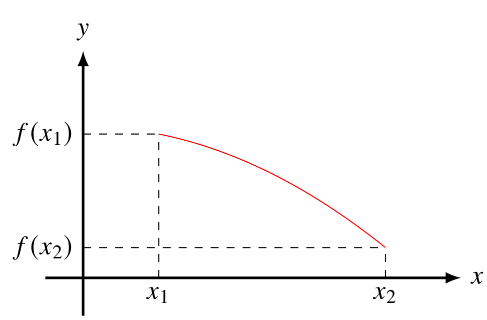
## 3 Variations, signes et extremums

**Définition:**
Soient $x_1 \leq x_2$ deux réels quelconques et $f$ une fonction affine.

- $f$ est dite croissante si $f(x_1) \leq f(x_2)$ c'est-à-dire qu'elle conserve l'ordre.
- $f$ est dite décroissante si $f(x_1) \geq f(x_2)$ c'est-à-dire qu'elle renverse l'ordre.
- $f$ est dite constante si $f(x_1) = f(x_2)$.




Fonction croissante




Fonction décroissante

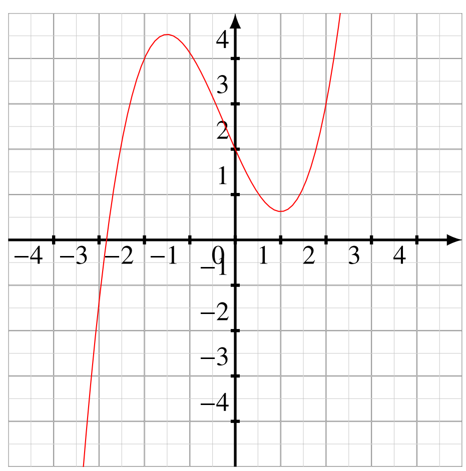
**Définition**:
On appelle tableau de variation un résumé des variations d'une fonction $f$ en fonction des valeurs de l'inconnue $x \in \mathcal{D}_f$.
Exemple :

| $x$ | $-2$ | | $0$ | | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | $4$ | | |
| | $0$ | $\nearrow$ | | $\searrow$ | $-3$ |

**Définition**:
On appelle tableau de variation un résumé des variations d'une fonction $f$ en fonction des valeurs de l'inconnu $x$.
Exemple :

| $x$ | $-4$ | | $1$ | | $8$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

Exercice:
Donner les tableaux de variation et de signe de la représentation graphique suivante :




**Définition**:
Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ et soit $c \in I$.

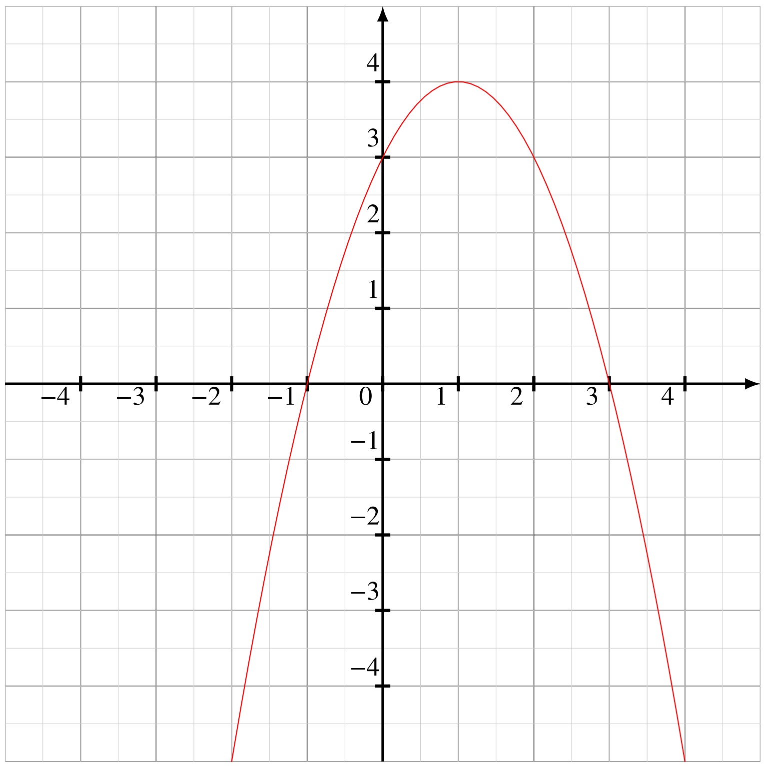
- $f(c)$ est un maximum pour la fonction $f$ si $\forall x \in I, f(x) \leq f(c)$.
- $f(c)$ est un minimum pour la fonction $f$ si $\forall x \in I, f(x) \geq f(c)$.

Exercice:
Donner le maximum et le minimum de la représentation graphique précédente sur les intervalles suivants:

- $[-4; 5]$
- $[-2; 1]$
- $[-3; -2]$

## 4 Exercice bilan

On considère la fonction $f : x \mapsto -(x+1)(x-3)$ définie sur $[-5; 5]$. La courbe représentative $C_f$ est donnée ci-dessous.




1. Répondre graphiquement aux questions suivantes:
   a. Déterminer l'image de 1 par $f$.
   b. Résoudre l'équation $f(x) = 0$
   c. Résoudre l'inéquation $f(x) > 2$.
2. Reprendre les questions précédentes par le calcul.
3. Etablir le tableau de signe de $f$.
4. Etablir le tableau de variation complet de $f$.
5. En déduire le maximum de $f$ sur son intervalle de définition.