Chapitre 9 : Suites arithmético-géométriques

Table des matières

Contenu

- Relation de récurrence.
- Sens de variations.
- Représentation graphique.

Dans le dernier cours sur les suites on a vu qu'une suite était une suite de nombres. On a également vu qu'une suite pouvait être générée de deux manières différentes : explicitement ou par récurrence.
Dans ce chapitre on va s'intéresser à deux cas particuliers très importants de suites définies par récurrence.

1 Suites arithmétiques

Définition:
Une suite (u_n) est dite arithmétique si elle est de la forme $u_{n+1} = u_n + r$ où r est un réel quelconque. r s'appelle la raison de la suite (u_n).

En d'autres mots, une suite est arithmétique si on additionne à chaque étape le même nombre r (la raison).

Exemple:

- Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $r = 5$ et $u_0 = 0$. On a donc $u_1 = u_0 + r = 0 + 5 = 5$ et $u_2 = u_1 + r = 5 + 5 = 10$.
- Soit (v_n) une suite arithmétique de raison $r = -1,5$ et $v_0 = 7$. On a donc $v_1 = v_0 + r = 7 - 1,5 = 5,5$ et $v_2 = v_1 + r = 5,5 - 1,5 = 4$

! Remarque importante

La représentation graphique d'une suite arithmétique est un nuage de points alignés.

Propriétés:
Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
On a que $\forall n \in \mathbb{N}, r = u_{n+1} - u_n$ donc on en déduit que:

- (u_n) est strictement croissante si et seulement si $r > 0$.
- (u_n) est strictement décroissante si et seulement si $r < 0$.
- (u_n) est constante si et seulement si $r = 0$.

Exemple: (précédent)

- Pour (u_n) on a $r = 5 > 0$ donc (u_n) est strictement croissante.
- Pour (v_n) on a $r = -1,5 < 0$ donc (v_n) est strictement décroissante

2 Suites géométriques

Définition:
Une suite (u_n) est dite géométrique si elle est de la forme $u_{n+1} = u_n q$ où q est un réel quelconque strictement positif. q s'appelle la raison de la suite (u_n).

En d'autres mots, une suite est géométrique si on multiplie à chaque étape le même nombre q (la raison).

Exemple:

- Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q = 2$ et $u_0 = 3$. On a donc $u_1 = u_0 q = 2 \times 3 = 6$ et $u_2 = u_1 q = 6 \times 2 = 12$.
- Soit (v_n) une suite géométrique de raison $q = 0,5$ et $v_0 = 200$. On a donc $v_1 = v_0 q = 200 \times 0,5 = 100$ et $v_2 = v_1 q = 100 \times 0,5 = 50$.

Remarque importante

La représentation graphique d'une suite géométrique est un nuage de points non alignés à tendance régulière.

Propriétés:
Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.
On a que $\forall n \in \mathbb{N}$, $q = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ donc on en déduit que:

- (u_n) est strictement croissante si et seulement si $q > 1$.
- (u_n) est strictement décroissante si et seulement si $q < 1$.
- (u_n) est constante si et seulement si $q = 1$.

Exemple: (précédent)

- Pour (u_n) on a $q = 2 > 1$ donc (u_n) est strictement croissante.
- Pour (v_n) on a $q = 0,5 < 1$ donc (v_n) est strictement décroissante

3 Exercice bilan

1. Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_2 = 5$ et $u_5 = 10$.
   a. Déterminer sa raison r.
   b. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
   c. Déterminer le sens de variation de (u_n).
2. Soit (v_n) une suite arithmétique telle que $v_2 = 5$ et $v_5 = 10$.
   a. Déterminer sa raison q.
   b. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.
   c. Déterminer le sens de variation de (v_n).