

Chapitre 1 : Généralités sur les fonctions

Axel Carpentier

Première technologique :

Tronc commun

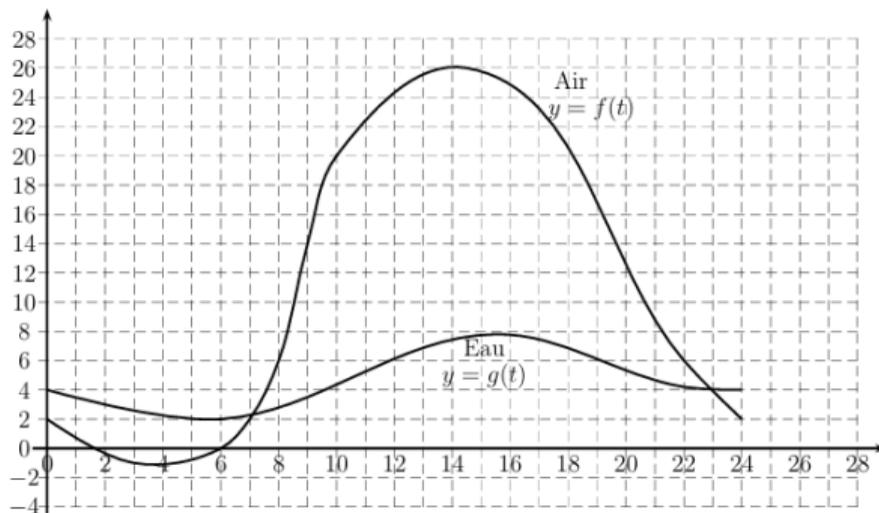
1. Préambule
2. Notions de fonction, d'image et d'antécédent
3. Résolutions graphiques
4. Variations, signes et extremums
5. Exercice bilan

Préambule

Exercice:

A l'aide du graphique ci-dessous représentant les relevés des températures de l'eau et de l'air, au bord d'un lac de montagne, pendant 24 heures.

On désigne respectivement par f et par g les fonctions mesurant la température en degré Celsius de l'air et de l'eau, en fonction du temps exprimé en heures et désigné par la variable t .



1. Traduire en langage courant les phrases suivantes :

Langage mathématiques	Langage courant
$f(17) = 24$	A 17h, la température de l'air était de 24°C.
L'image de 6 par g est 2.	A 6h, la température....
Quels sont les antécédents de 14 par la fonction f ?	A quelle heure.....?
Le maximum de la fonction f est 26	
Si $1 < t < 6$, alors $f(t) < 0$	Entre 1h et 6h...
$f(7) = g(7)$	A 7h,.....
Résoudre $f(t) = g(t)$.	
f est strictement décroissante sur $[14; 24]$.	

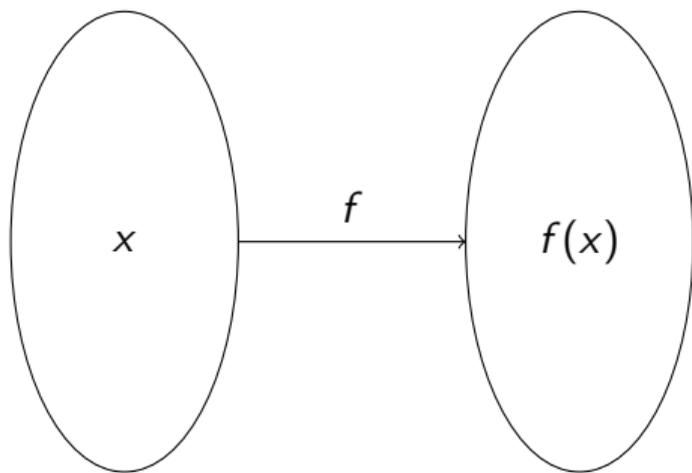
2. Traduire en langage mathématiques les phrases suivantes :

Langage mathématiques	Langage courant
A minuit, la température de l'eau était de 4°C .	
A quelle heure la température de l'eau est-elle de 4°C ?	
A 8h, la température de l'eau était inférieure à celle de l'air.	
A quelles heures la température de l'air est-elle supérieure à celle de l'eau ?	
La température minimale de l'eau est de 2°C .	
Entre 6h et 15h, la température de l'eau monte.	

Définition:

Définir une fonction f sur un ensemble de réels \mathcal{D}_f , c'est associer à chaque réel $x \in \mathcal{D}_f$ un réel y .

Afin de bien comprendre que y dépend de x , on le note donc $y = f(x)$.



Notation et vocabulaire:

- On appelle domaine de définition de f , noté \mathcal{D}_f , l'ensemble des valeurs sur lequel f est définie.
- On note $f : x \mapsto f(x)$, la fonction qui à x associe $f(x)$. $y = f(x)$ est l'image de x , x est un antécédent de y .
- On appelle courbe représentative d'une fonction f dans le plan, notés \mathcal{C}_f , l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $x \in \mathcal{D}_f$ et $y = f(x)$

Remarque IMPORTANTE

Il ne faut pas confondre f et $f(x)$! f représente une fonction tandis que $f(x)$ représente un nombre réel.

Remarque

L'ensemble de définition d'une fonction, définie par une expression, est l'ensemble des valeurs pour lesquelles le calcul d'une image a un sens. Il n'existe que deux cas (en classe de Seconde) où le calcul n'est pas possible : la division par 0 et la racine carré d'un nombre négatif.

Exercice:

Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes :

- $f_1 : x \mapsto \frac{1}{x+1} ;$

- $f_2 : x \mapsto \frac{3x}{x^2-1} ;$

- $f_3 : x \mapsto \frac{x-1}{x^2+1} ;$

- $f_4 : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}} ;$

- $f_5 : x \mapsto \sqrt{x-1} ;$

- $f_6 : x \mapsto \sqrt{2-x^2} ;$

Remarque importante

On a deux manières de comprendre une fonction : une expression algébrique ou un graphique. Exemple : la fonction carré/cube/...

Méthode:

- Pour déterminer une image d'un réel a :
 - Graphiquement :
On place a sur l'axe des abscisses, on prend le point de la courbe d'abscisse a et on lit son ordonnée.
 - Algébriquement :
On remplace tous les x par a dans l'expression algébrique de f .
- Pour déterminer un antécédent d'un réel k :
 - Graphiquement :
On se place en k sur l'axe des ordonnées, on prend le ou les points de la courbe d'ordonnée k et on lit leurs abscisses.
 - Algébriquement :
On cherche toutes les valeurs de $x \in \mathcal{D}_f$ telles que $f(x) = k$.

Exercice :

Soit $f : x \mapsto x^2 + 1$.

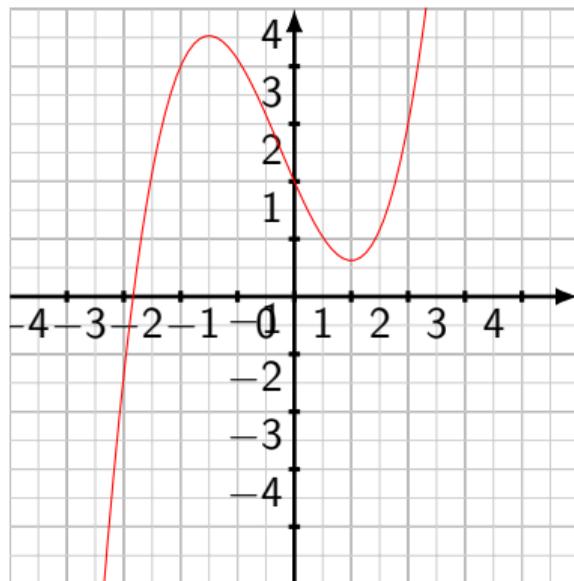
1. Quel est le domaine de définition \mathcal{D}_f de f ?
2. Calculer l'image de 3 par f .
3. Calculer le (ou les) antécédent(s) de 10 par f .

Notions de fonction, d'image et d'antécédent

Exercice:

Soit la représentation graphique \mathcal{C}_f d'une fonction f ci-dessous.

1. Quel est le domaine de définition \mathcal{D}_f de f ?
2. 2.1 Déterminer l'image de 2 par f .
2.2 Déterminer $f(-2)$.
3. Calculer le (ou les) antécédent(s) de 2 par f .



Méthode:

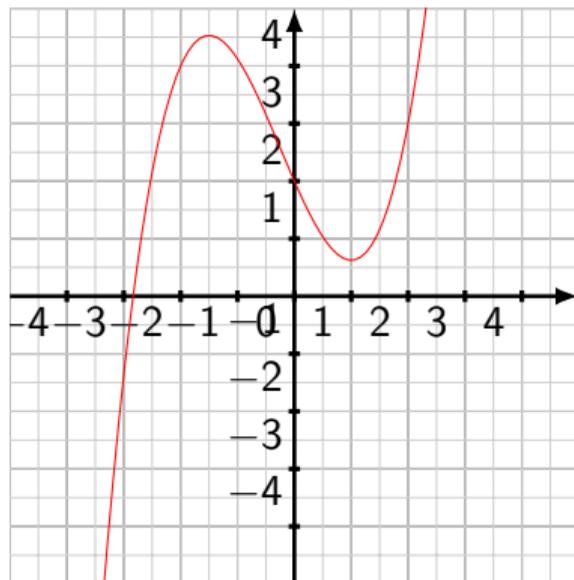
- Résoudre une équation $f(x) = k$ revient à déterminer les antécédents de k par la fonction f .
- Résoudre une inéquation $f(x) \geq k$ (respectivement $f(x) \leq k$) revient à déterminer les points de la courbe de f dont l'ordonnée est supérieure (respectivement inférieure) à k puis l'ensemble de leurs abscisses.

Résolutions graphiques

Exercice:

Soit la représentation graphique \mathcal{C}_f d'une fonction f ci-dessous.

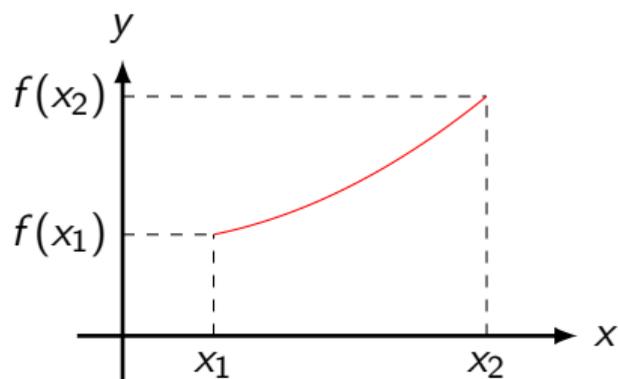
1. Déterminer la (ou les) solution(s) de $f(x) = -2$
2. Déterminer la (ou les) solution(s) de $f(x) = 4$
3. Déterminer les solutions de $f(x) < 0$.
4. Déterminer les solutions de $f(x) \geq 2$.



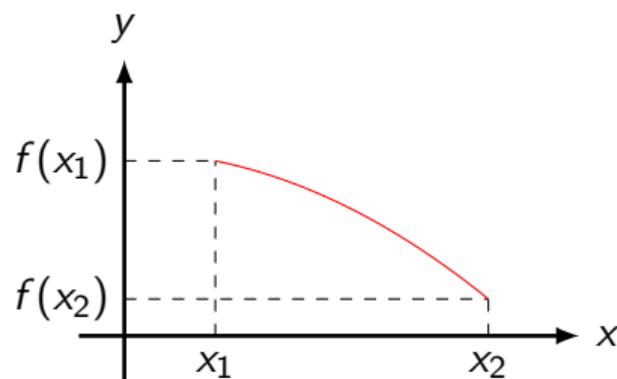
Définition:

Soient $x_1 \leq x_2$ deux réels quelconques et f une fonction affine.

- f est dite croissante si $f(x_1) \leq f(x_2)$ c'est-à-dire qu'elle conserve l'ordre.
- f est dite décroissante si $f(x_1) \geq f(x_2)$ c'est-à-dire qu'elle renverse l'ordre.
- f est dite constante si $f(x_1) = f(x_2)$.



Fonction croissante



Fonction décroissante

Définition:

On appelle tableau de variation un résumé des variations d'une fonction f en fonction des valeurs de l'inconnue $x \in \mathcal{D}_f$.

Exemple :

x	-2	0	4
$f(x)$	0	4	-3

The table shows the variation of the function $f(x)$ over the domain \mathcal{D}_f . The x-axis is marked with -2, 0, and 4. The f(x) axis is marked with 0, 4, and -3. Arrows indicate that the function is increasing from $x = -2$ to $x = 0$, and decreasing from $x = 0$ to $x = 4$.

Définition:

On appelle tableau de variation un résumé des variations d'une fonction f en fonction des valeurs de l'inconnu x .

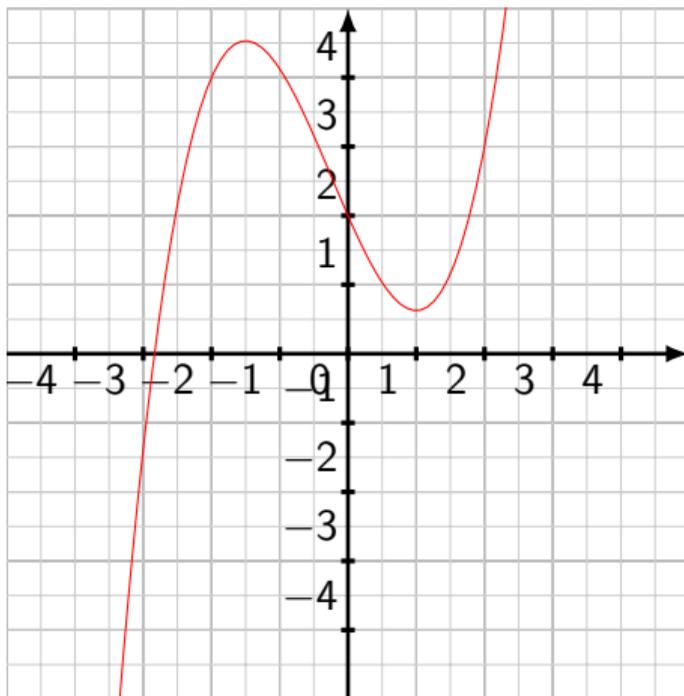
Exemple :

x	-4	1	8
$f(x)$	-	0	+

Variations, signes et extremums

Exercice:

Donner les tableaux de variation et de signe de la représentation graphique suivante :



Définition:

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit $c \in I$.

- $f(c)$ est un maximum pour la fonction f si $\forall x \in I, f(x) \leq f(c)$.
- $f(c)$ est un minimum pour la fonction f si $\forall x \in I, f(x) \geq f(c)$.

Exercice:

Donner le maximum et le minimum de la représentation graphique précédente sur les intervalles suivants:

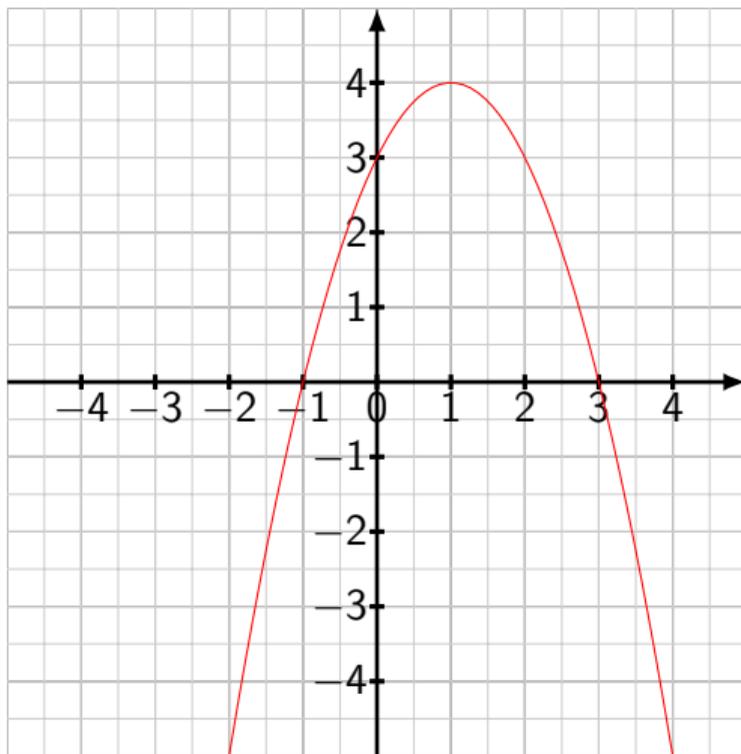
- $[-4; 5]$

- $[-2; 1]$

- $[-3; -2]$

Exercice bilan

On considère la fonction $f : x \mapsto -(x + 1)(x - 3)$ définie sur $[-5; 5]$. La courbe représentative \mathcal{C}_f est donnée ci-dessous.



1. Répondre graphiquement aux questions suivantes:
 - 1.1 Déterminer l'image de 1 par f .
 - 1.2 Résoudre l'équation $f(x) = 0$
 - 1.3 Résoudre l'inéquation $f(x) > 2$.
2. Reprendre les questions précédentes par le calcul.
3. Etablir le tableau de signe de f .
4. Etablir le tableau de variation complet de f .
5. En déduire le maximum de f sur son intervalle de définition.