Chapitre 7 : Dérivée locale

Axel Carpentier

Première technologique :

Tronc commun

Table des matières

Nombre dérivé

Rappels:

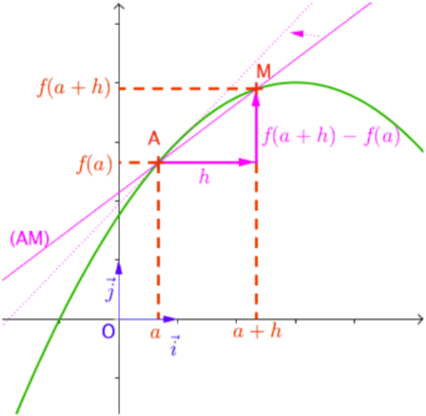
Soit une fonction affine $f : x \mapsto mx + p$ dont la droite représentative passe par les points $A(x_1, f(x_1))$ et $B(x_2, f(x_2))$. Alors le coefficient directeur de la fonction f est donné par :

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

qui est le taux de variation entre les points x_1 et x_2.

Nombre dérivé

On considère une fonction f quelconque. On s'intéresse aux points de coordonnées $A(a, f(a))$ et $M(a + h, f(a + h))$



Nombre dérivé

D'après le rappel précédent, on peut donc calculer le coefficient directeur de la droite (AM) qui est donné par :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Lorsque le point M se rapproche de A, on va avoir que h se rapproche de plus en plus de 0. Ceci signifie donc que le coefficient directeur de la droite (AM) va être égal à la limite de $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ quand h tend vers 0.

Définition:

Ce coefficient directeur s'appelle le nombre dérivé de f en a, noté $f'(a)$ et on a :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

On dira que f est dérivable en a.

Nombre dérivé

Remarque

Il se peut que la limite ne soit pas finie, on dira que f n'est pas dérivable en a. C'est le cas de la fonction racine carrée en 0.

<u>Exercice:</u>

Soit $f : x \mapsto x^2$, calculer $f'(2)$.

Equation de la tangente

Définition:

La courbe de f admet au point $A(a, f(a))$ une tangente (T) de coefficient directeur $f'(a)$.

Remarque

La tangente à une courbe en un de ses points est une droite qui "touche" la courbe au plus près au voisinage de ce point.
La tangente est une droite de coefficient directeur $f'(a)$ donc a pour expression : $(T) : y = f'(a)x + b$. Or $A(a, f(a)) \in (T)$ d'où $f(a) = f'(a)a + b$ et donc au final on a l'équation de la tangente donnée par :

$$\boxed{(T) : y = f'(a)(x - a) + f(a)}$$

.

Equation de la tangente

Méthode:

Soit f une fonction quelconque et $A(a, f(a))$ sur le courbe de f. On veut déterminer la tangente à la courbe de f au point A:

- Déterminer $f(a)$ si on ne le connait pas déjà ;
- Déterminer le nombre dérivé $f'(a) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$;
- La tangente au point A est donc de la forme $y = f'(a)x + b$, pour déterminer b on évalue l'équation de la tangente au point A ;
- Représenter graphiquement la tangente revient à tracer une fonction affine.

Equation de la tangente

Exercice:

Déterminer l'équation de la tangente des fonctions suivantes aux points suivants:

- $f(x) = x^2$ au point $A(1,1)$.
- $f(x) = x^3$ au point $A(1,1)$.

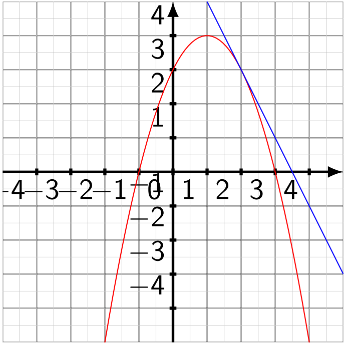
Exercice:

Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a dans les cas suivants :

- $a = -3$, $f(-3) = 1$ et $f'(-3) = 2$.
- $a = 5$, $f'(5) = -5$ et la tangente passe par le point de coordonnées $(1, -1)$.
- $a = 1$, $f(1) = 3$ et (T) est parallèle à la droite d'équation $y = x - 1$.

Exercice bilan

On considère la fonction $f : x \mapsto -(x+1)(x-3)$ définie sur $[-5; 5]$. La courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est donnée ci-dessous.



1. On a représenté ci-dessus la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2. Déterminer graphiquement $f'(2)$.
2. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $-0,5$ sachant que $f'(-0,5) = 3$. Tracer cette droite le plus précisément possible dans le repère.