Chapitre 10 : Fonctions polynômiales de degré 3

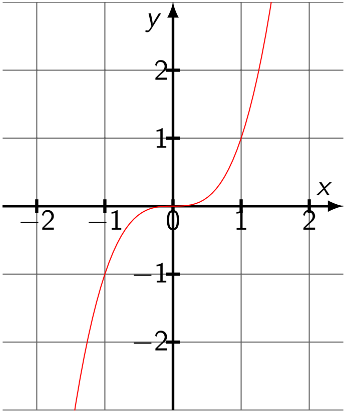
Axel Carpentier

Première technologique :

Tronc commun

Table des matières

On connaît bien la fonction cube étudiée en classe de seconde : $x \mapsto x^3$.



Rappels et définitions

On peut déterminer son tableau de signe et son tableau de variation sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$x \mapsto x^3$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

Rappels et définitions

Définition:

On appelle fonction polynôme de degré 3 toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ de la forme $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ où $a \neq 0$

Exemple:
Les fonctions $f(x) = 3x^3 - 7x + 3$; $g(x) = 3 - 2x^3$; $h(x) = (x-4)(x+3)(x-7)$ sont des polynômes de degré 3
Les fonctions $F(x) = 6x - 1$ et $G(x) = x^4 + x^2 + 1$ ne le sont pas.

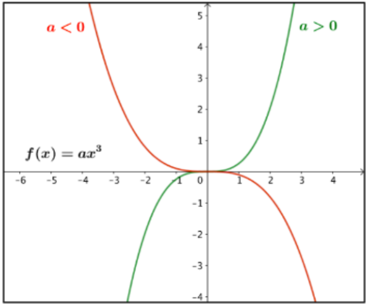
Remarque

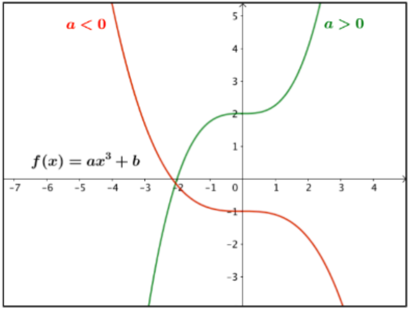
Cette année, on se contentera d'étudier les fonctions de degré 3 de la forme $x \mapsto ax^3$ et $x \mapsto ax^3 + b$.

Propriété:

Soit f un polynôme de degré 3 de la forme $f(x) = ax^3 + b$.

- Si $a > 0$, f est strictement croissante.
- Si $a < 0$, f est strictement décroissante.





Forme factorisée d'un polynôme de degré 3

Définition:

Soit f un polynôme degré 3 de la forme $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$
L'équation $f(x) = 0$ possède trois solutions (possiblement égales) x_1,x_2 et x_3 appelées racines de f.

Signe d'un polynôme de degré 3

Exercice:

On considère la fonction de degré 3 $f(x) = 5(x-4)(x-1)(x+3)$.

- Déterminer les racines de f.
- Développer f et vérifier.

Exercice:

Etudier le signe de la fonction $f(x) = 2(x+1)(x-2)(x-5)$.

Equations de la forme $x^3 = c$

Propriété:

L'équation $x^3 = c$ avec c positif, admet une unique solution $\sqrt[3]{c}$.

Exercice:

Quelles sont les solutions des équations suivantes ?

1. $x^3 = 27$
2. $2x^3 - 6 = 16$

Exercice bilan

Soit $f : x^3 - 2x^2 - x + 2$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $f(x) = (x+1)(x-1)(x-2)$.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
3. Etablir le tableau de signe de f puis résoudre l'inéquation $f(x) < 0$.