Chapitre 12 : Dérivation

Axel Carpentier

Première technologique :

Tronc commun

Table des matières

Fonction dérivée

Définition:

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
On dit que la fonction f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I.
On définit alors la fonction dérivée de f, noté f', qui a tout $x \in I$ associe le nombre dérivé $f'(x)$ de f en x.

Remarque

La dérivée f' de f définit donc bien une fonction, son ensemble de définition est appelé ensemble de dérivation de f.
On définit donc la fonction dérivée telle que $\forall x \in I, f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Fonction dérivée

noindentExemple:
On va chercher à déterminer la dérivée de la fonction $\forall x \in I, f(x) = x^2$ sur $I = \mathbb{R}$.
Soit $x \in I$, on a $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \dfrac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \dfrac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = 2x + h$
Donc on a $\forall x \in I, f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} 2x + h = 2x$.

Fonction dérivée

En effectuant exactement le même processus de calcul, on peut déterminer des dérivées d'autres fonctions usuelles vues cette année.

Fonction f	**Dérivée** f'
$f(x) = a,\ a \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = ax,\ a \in \mathbb{R}$	$f'(x) = a$
$f(x) = ax^2,\ a \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 2ax$
$f(x) = ax^3,\ a \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 3ax^2$

Exercice:

Dériver les fonctions suivantes :

- $f(x) = 4x$
- $g(x) = 2x^2$
- $h(x) = 7$
- $p(x) = x^3$

Opérations sur les dérivées

Propriété:

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k un réel :

- $(u+v)' = u' + v'$;
- $(ku)' = ku'$;

Exercice:

Déterminer la dérivée de la fonction f définie par pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$.

Application à l'étude des variations d'une fonction

Propriété fondamentale:

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- f est strictement croissante sur I si et seulement si $\forall x \in I, f'(x) > 0$;
- f est strictement décroissante sur I si et seulement si $\forall x \in I, f'(x) < 0$;
- f est constante sur I si et seulement si $\forall x \in I, f'(x) = 0$;

Application à l'étude des variations d'une fonction

Exemple:
On cherche à étudier les variations de la fonction $f(x) = 2x^2 + 8x - 5$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

- On commence par déterminer la dérivée de f.
  On a $f'(x) = 4x + 8$.
- On étudie le signe de cette dérivée.
  On a $f' < 0$ sur $]-\infty; -2[$ et $f' > 0$ sur $]-2; +\infty[$.
- On en déduit les variations de f par la propriété fondamentale.
  On a f strictement décroissante sur $]-\infty; -2[$ et strictement croissante sur $]-2; +\infty[$.

Application à l'étude des variations d'une fonction

- On trace le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(-2)$	$\nearrow$	$+\infty$

- On cherche les extremums de la fonction f.
  On a que f' ne s'annule que en -2 et change de signe donc f atteint son minimum en -2 qui vaut $f(-2)$.

Exercice bilan

Soit $f : x \mapsto \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 5$.

1. Déterminer l'expression de $f'(x)$.
2. Montrer que $f'(x) = (x-1)(x-3)$.
3. Etablir le tableau de signe de f' puis le tableau de variation de f.