

Dérivation

1.1 Compétences Attendues

- Calculer la dérivée d'une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à trois.
- Déterminer le sens de variation et les extremums d'une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 3.

1.2 Exercices

Exercice 1:

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'expression de sa fonction dérivée.

- | | |
|---|--|
| 1. $f(x) = (-5) - 5x$ | 5. $m(x) = -5,6x^2 - 1,5x - 5$ |
| 2. $h(x) = \frac{x}{3} + \frac{3}{7}$ | 6. $o(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5x + 9$ |
| 3. $k(x) = -3x^2 - 8x + 4$ | 7. $p(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + \frac{8x}{9} + \frac{1}{3}$ |
| 4. $l(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{9} + \frac{5}{9}$ | 8. $q(x) = 4,5x^3 - 3,4x^2 + 7$ |

Exercice 2:

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'expression de sa fonction dérivée.

- | | |
|-----------------------------|-----------------------------|
| 1. $f(x) = 7,1x^2 + 5,5x$ | 4. $l(x) = 8,8x^3 + 8,1x^2$ |
| 2. $g(x) = 4,8x^2 - 6,1$ | 5. $m(x) = 4,2x - 1,9x^2$ |
| 3. $h(x) = 9,2x^2 - 5,6x^3$ | 6. $p(x) = 3,2x - 3,5x^2$ |

Exercice 3:

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'expression de sa fonction dérivée.

- | | |
|---------------------------|-------------------------------|
| 1. $f(x) = -5(5x + 7)x^2$ | 3. $h(x) = (9x + 8)x^2$ |
| 2. $g(x) = 9(6x - 5)x^2$ | 4. $h(x) = (4x + 1)(-2x + 1)$ |

Exercice 4:

Déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f au point d'abscisse a , c'est-à-dire le nombre dérivé $f'(a)$.

- | | |
|---|---|
| 1. $f(x) = -4x^2 + 6x + 1$
$a = 1$ | 3. $h(x) = -\frac{x^3}{3} + x^2$
$a = 3$ |
| 2. $g(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}x + 2$
$a = 3$ | 4. $i(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$
$a = -2$ |

Exercice 5:

Soit $f : x \mapsto 3x^2 - 2$.

- Déterminer $f'(x)$.
- Calculer $f(1)$ puis $f'(1)$.
- En déduire une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.

Exercice 6:

Déterminer dans chacun des cas suivants une équation de la tangente à la courbe de la fonction f au point d'abscisse a .

- $f(x) = x^2 + 2x$ et $a = 3$.
- $f(x) = -x^3 + x^2 - 5$ et $a = 2$.
- $f(x) = -4x^3 + 3x^2 - 10x + 1$ et $a = -1$.

Exercice 7:

Une trottinette roule en ligne droite. La distance (exprimée en mètres) parcourue par cette trottinette en fonction du temps t (exprimé en heures) est donnée par la fonction $d(t) = 1,5t^2 + 10t + 1$.

- Exprimer la vitesse instantanée de la trottinette en fonction du temps en heures.
- Calculer la vitesse instantanée de la trottinettes au bout de 5 secondes.

Exercice 8:

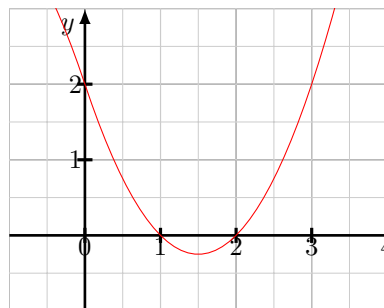
La courbe $\mathcal{C}$ de la figure est la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $[-1; 8]$ dans le plan muni d'un repère orthonormé.

- Résoudre graphiquement dans $[-1; 8]$ les équations et inéquations suivantes:
 - $f'(x) = 0$
 - $f'(x) < 0$
 - $f'(x) > 0$

2. Etablir le tableau de variation de f sur $[-1; 8]$

3. Utiliser les indications de la figure pour résoudre dans $[-1; 8]$ l'équation $f(x) = 0$

4. En déduire le signe de $f(x)$ lorsque x varie dans $[-1; 8]$



Exercice 9:

f est une fonction définie sur $[0; 3]$. Son tableau de variation sur $[0; 3]$ est :

x	0	2	3
$f(x)$	0	$\frac{16}{3}$	3

- f est dérivable sur $[0; 3]$. On admet que $f'(2) = 0$ et que f' ne s'annule que en 2. Donner le tableau de signe de f'
- Tracer une courbe représentative possible de f dans un repère orthonormé

Exercice 10:

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On donne ci-dessous le tableau de signes de $f'(x)$.

x	$-\infty$	15	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+

Quel est le sens de variation de f sur l'intervalle $] -\infty; 15]$? sur l'intervalle $[15; +\infty[$?

Exercice 11:

Soit f une fonction dérivable sur $[0; 9]$. On donne ci-dessous le tableau de signes de $f'(x)$.

x	0	2	5	9	
$f'(x)$	+	0	-	0	+

Déterminer les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; 9]$.

Exercice 12:

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que pour tout réel x , $f(x) = x^2 - 4x + 1$.

- Justifier que, pour tout réel x , $f'(x) = 2x - 4$
- Recopier et compléter le tableau de variation de f donné ci-dessous.

x	0	...	3
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

- Quel est le minimum de f sur $[0; 3]$? En quelle valeur de x est-il atteint ?

Exercice 13:

Soit $f : x \mapsto \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x + 4$ définie sur $\mathbb{R}$.

- Déterminer $f'(x)$.
- Démontrer que pour tout x réel, $f'(x) = (x - 2)(2x + 3)$.
- Dresser le tableau de signes de $f'(x)$.
- En déduire le tableau de variations complet de f .

Exercice 14:

Soit $f : x \mapsto -4x^3 - 10x^2 + 8x - 2$ définie sur $\mathbb{R}$.

- Déterminer $f'(x)$.
- Démontrer que pour tout x réel, $f'(x) = -4(3x - 1)(x + 2)$.
- Dresser le tableau de signes de $f'(x)$.
- En déduire le tableau de variations complet de f .

Exercice 15:

Soit $f : x \mapsto x^3 + 5x^2$ définie sur $\mathbb{R}$.

- Déterminer $f'(x)$.
- Factoriser $f'(x)$.
- Dresser le tableau de signes de $f'(x)$.
- En déduire le tableau de variations complet de f .

Exercice 16:

Soit f la fonction définie sur $[-2; 4]$ par $f : x \mapsto -\frac{x^3}{3} + x^2$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

- Etudier dans un tableau le signe de f' sur $[-2; 4]$
 - Compléter après l'avoir reproduit le tableau de valeurs suivant

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$							
 - Dresser le tableau de variation de f sur $[-2; 4]$
- Déterminer le coefficient directeur de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 3
- Construire T et $\mathcal{C}$
- Déterminer une équation de T

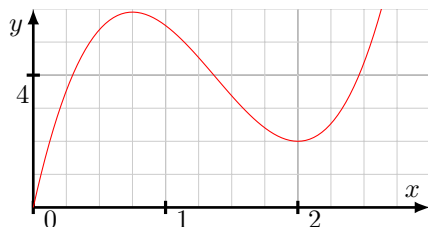
Exercice 17:

On considère une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0; 2, 5]$.

On donne la courbe représentative de la fonction f , notée $\mathcal{C}$, dans un repère orthogonal.

La courbe $\mathcal{C}$ possède les propriétés suivantes:

- La courbe $\mathcal{C}$ passe par le point $A(1; 5, 5)$
- La courbe $\mathcal{C}$ passe par le point $B(2; 2)$
- La tangente en B à la courbe $\mathcal{C}$ est horizontale
- La tangente en A à la courbe $\mathcal{C}$ passe par le point $T(0; 8, 5)$



- Reproduire la figure
 - Placer les points A ; B et T et tracer les tangentes à la courbe $\mathcal{C}$ en A et en B .
 - Déterminer $f(1)$; $f(2)$ et $f'(1)$

(d) Donner par lecture graphique une valeur approchée des solutions de l'équation $f(x) = 3$

(e) Justifier que $f'(2) = 0$. Donner par lecture graphique une valeur approchée de la deuxième solution de l'équation $f'(x) = 0$

- La fonction f dont on connaît la courbe $\mathcal{C}$ est définie sur l'intervalle $[0; 2, 5]$ par $f : x \mapsto 4x^3 - 16,5x^2 + 18x$

(a)

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5
$f(x)$						

- Calculer f'
 - Vérifier $f'(x) = (12x - 24)(x - 0,75)$
 - Donner le signe de f' à l'aide d'un tableau de signes
- En déduire le tableau de variation de la fonction f
- Déterminer les extremums de la fonction f

Exercice 18:

Tempérer le chocolat consiste à le faire fondre en trois étapes afin de lui donner une forme idéale pour réaliser des enrobages.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 12, 5]$ par :

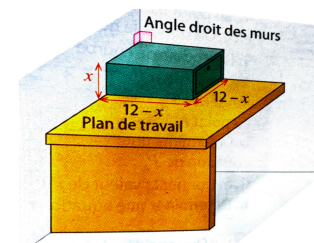
$$f(t) = 0,14t^3 - 3,15t^2 + 18,48t + 18$$

Lorsque t représente le temps (en minutes), on admet que $f(t)$ modélise la température (en degré Celsius) du chocolat à l'instant t , au cours d'une opération de tempérage.

- Pour tout t de l'intervalle $[0; 12, 5]$, calculer $f'(t)$ et vérifier que $f'(t) = 0,42(t - 4)(t - 11)$.
- Construire le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0; 12, 5]$.
- Selon ce modèle, quelle est la température maximale atteinte lors du tempérage de ce chocolat ?

Exercice 19:

On veut réaliser, dans l'angle d'un plan de travail, un rangement ayant la forme d'un pavé droit selon le plan ci-dessous. Les longueurs sont en décimètres et la hauteur x du rangement est comprise entre 0 et 12 décimètres.



- Justifier que le volume (en dm^3) du rangement est donné par la fonction f définie l'intervalle $[0; 12]$ par $f(x) = x^3 - 24x^2 + 144x$

2. (a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in [0; 12]$.
(b) Montrer que, pour tout $x \in [0; 12]$, $f'(x) = 3(x - 4)(x - 12)$.
3. Etudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0; 12]$ et en déduire les variations de f sur $[0; 12]$.
4. Déterminer la valeur de x pour laquelle le rangement a un volume maximal. Quel est ce volume maximal ?

Exercice 20:

Un producteur de truffes noires cultive, ramasse et conditionne de 0 à 45 kilogrammes de ce produit par semaine durant la période de production de truffe. On désigne par $B(x)$ le bénéfice hebdomadaire (en euros) réalisé par la vente de x kilogrammes de truffes. La fonction B est définie sur l'intervalle $[0; 45]$ par :

$$B(x) = -x^3 + 60x^2 - 525x.$$

1. Calculer $B'(x)$ pour $x \in [0; 45]$.
2. Montrer que, pour tout $x \in [0; 45]$, $B'(x) = (-3x + 15)(x - 35)$.
3. Etudier le signe de $B'(x)$ sur $[0; 45]$. En déduire le tableau de variation de la fonction B .
4. Pour quelle quantité de truffes le bénéfice du producteur est-il maximal ? A combien s'élève-t-il alors ?

Exercice 21:

Le service d'urgence d'un hôpital reçoit un patient infecté par une bactérie très virulente. On administre à ce patient un puissant antibiotique. On considère que la fonction f permet de modéliser, en fonction du temps, le nombre de bactéries (en centaines), présentes dans le prélèvement sanguin effectué sur le patient à l'instant t (en heures). Cette fonction est définie sur l'intervalle $[0; 12]$ par :

$$f(t) = -t^3 + 9t^2 + 21t + 190$$

1. Soit f' la fonction dérivée de la fonction f . Calculer $f'(t)$ pour tout réel $t \in [0; 12]$.
2. Montrer que, pour tout réel $t \in [0; 12]$: $f'(t) = -3(t + 1)(t - 7)$.
3. Etudier le signe de $f'(t)$ et en déduire le tableau de variation de la fonction f sur $[0; 12]$.
4. Déterminer le maximum de f sur l'intervalle $[0; 12]$ et préciser en quelle valeur de t il est atteint. Interpréter ce résultat.
5. La vitesse de croissance du nombre de bactéries à l'instant t est donnée par $f'(t)$. Déterminer la vitesse de croissance du nombre de bactéries à l'instant $t = 10$.

Exercice 22:

Julia utilise un lance-pierre pour faire tomber des boîtes de conserves. Les boîtes se trouvent au sol à une distance de $L = 50m$ de Julia qui se trouve à une hauteur $h = 1,5m$.

En l'absence de frottement, les équations de Newton pour l'étude des mouvements s'écrivent :

$$x(t) = v_{0x}t \quad \text{et} \quad y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t + h$$

Avec :

- $x(t)$ l'abscisse du projectile en fonction du temps ;
- $y(t)$ l'ordonnée du projectile en fonction du temps ;
- $v_{0x} = 20m/s$ la composante horizontale de la vitesse initiale ;
- v_{0y} la composante verticale de la vitesse initiale ;
- $g = 10m/s^2$ la constante de gravitation.

On souhaite connaître la valeur de v_{0y} pour que Julia atteigne les boîtes.

1. Calculer $x'(t)$.
2. Montrer que $t = \frac{x}{20}$ et en déduire que :

$$y(x) = -0,0125x^2 + \frac{v_{0y}}{20}x + 1,5$$

3. Calculer $y(0)$.
4. Faire un schéma représentant la situation.
5. Calculer $y'(x)$ puis $v_0 = y'(0)$.
6. Montrer que $y(x) = -0,0125x^2 + v_0x + 1,5$.
7. Pour que la pierre atteigne les boîtes il faut que la parabole coupe l'axe des abscisses à $x = 50$. En déduire la valeur de v_{0y} .