1 Recasages

- **103 :** Conjugaison dans un groupe. Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.
- **104 :** Groupes finis. Exemples et applications.
- **105 :** Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.
- **108 :** Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.
- **190 :** Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

2 Développement

<u>Théorème :</u>

Si $n \neq 6$, les automorphismes de $\mathcal{S}_n$ sont intérieurs.

Preuve :

Etape 1 : Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$ d'ordre 2, on dénombre les $\theta \in \mathcal{S}_n$ telles que $\sigma \circ \theta = \theta \circ \sigma$.

On a que σ est un élément d'ordre 2, c'est donc un produit $\tau_1 \circ \cdots \circ \tau_k$ de transpositions à supports disjoints. Pour $\theta \in \mathcal{S}_n$ on a :

$$\theta \circ \sigma \circ \theta^{-1} = (\theta \circ \tau_1 \circ \theta^{-1}) \circ \cdots \circ (\theta \circ \tau_k \circ \theta^{-1})$$

et les $\theta \circ \tau_i \circ \theta^{-1}$ sont des transpositions à supports disjoints car :

$$\theta \circ (a \ \ b) \circ \theta^{-1} = (\theta(a) \ \ \theta(b))$$

Or θ commute avec σ si et seulement si $\theta \circ \sigma \circ \theta^{-1} = \sigma$. On a donc ceci uniquement si $\theta \circ \tau_i \circ \theta^{-1}$ sont les transpositions τ_j à permutation près. (par unicité de la décomposition en produit de cycles à supports disjoints).

Les candidats θ sont donc ceux qui induisent une permutation des supports $\{a_1, b_1\}, \ldots \{a_k, b_k\}$ des transpositions respectives $\tau_1, \ldots, \tau_k$.

- Il y a $k!$ manières de permuter ces supports.
- Pour chaque permutation, on a 2^k manières de définir θ sur $\{a_1, b_1, \ldots, a_k, b_k\}$ car si on envoie $\{a_i, b_i\}$ sur $\{a_j, b_j\}$ on a :

$$\begin{cases} a_i \to a_j \\ b_i \to b_j \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a_i \to b_j \\ b_i \to a_j \end{cases}$$

- Il y a $(n-2k)!$ manières de permuter les éléments qui ne sont pas dans le support des τ_i.

On a donc que le centralisateur de σ est de cardinal $2^k k!(n-2k)!$.

Etape 2 : On montre que $\phi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{S}_n)$ envoie une transposition sur une transposition.

L'ensemble des transpositions forme une partie génératrice de $\mathcal{S}_n$.
Ainsi, ϕ sera entièrement déterminé si l'on connaît l'image par ϕ des transpositions.

Si τ est une transposition, alors $\phi(\tau)$ est d'ordre 2, donc se décompose en produit de k transpositions à supports disjoints.

Or on a que le centralisateur de $\phi(\tau)$ est isomorphe à celui de τ donc de même cardinal.
Donc d'après l'étape 1 on a :

$$\underbrace{2(n-2)!}_{k=1} = 2^k k!(n-2k)!$$

D'où

$$k! 2^{k-1} = (n-2)\ldots(n-2k+1)$$

- Si $k = 2$, on a $(n-2)(n-3) = 4$ qui n'a pas de solution dans $\mathbb{N}$.
- Si $k \geq 3$, on a $\binom{n-k}{k}(n-2)\ldots(n-k+1) = 2^{k-1}$.
  Ceci n'est possible que si $n-k+1 = n-2 \implies k = 3$.
  Mais alors $\binom{n-3}{3}(n-2) = 4 \implies n = 6$ cas qui est écarté.

On a donc $k = 1$ donc $\phi(\tau)$ est une transposition.

Etape 3 : On montre qu'un automorphisme qui envoie les transpositions sur les transpositions est intérieur.

- ϕ étant un morphisme, il suffit de montrer qu'il est intérieur sur un ensemble de générateurs de $\mathcal{S}_n$.
  On s'intéresse donc à la famille $((1 \ \ k))_{k \in \{2,\ldots,n\}}$ qui engendre $\mathcal{S}_n$.
- Il existe alors $a_1 \neq a_2$ et $a \neq b$ tels que :

$$\phi((1 \ \ 2)) = (a_1 \ \ a_2) \quad \text{et} \quad \phi((1 \ \ 3)) = (a \ \ b)$$

  $(1 \ \ 2)$ et $(1 \ \ 3)$ ne commutent pas donc $(a_1 \ \ a_2)$ et $(a \ \ b)$ non plus. On a donc :

$$\mathrm{Supp}(1 \ \ 2) \cap \mathrm{Supp}(1 \ \ 3) = \{a_1, a_2\} \cap \{a, b\} \neq \emptyset$$

On prend alors $a = a_1$ et on note $b = a_3$ d'où $\phi((1\ \ 3)) = (a_1\ \ a_3)$.
On a que $a_2 \neq a_3$ par injectivité de ϕ.

- De même, $(1\ \ 4)$ ne commute ni avec $(1\ \ 3)$ ni avec $(1\ \ 2)$ d'où

$$\mathrm{Supp}(1\ \ 2) \cap \mathrm{Supp}(1\ \ 3) \cap \mathrm{Supp}(1\ \ 4) \neq \emptyset$$

Si on suppose que $(1\ \ 4) = (a_2\ \ a_3)$ alors :

$$\phi((1\ \ 2)(1\ \ 3)(1\ \ 4)) = (a_1\ \ a_2)(a_1\ \ a_3)(a_2\ \ a_3) = (a_1\ \ a_3) = \phi((1\ \ 3))$$

D'où :

$$(1\ \ 2)(1\ \ 3)(1\ \ 4) = (1\ \ 3)$$

Ce qui est faux.
On a donc $a_1 \in \mathrm{Supp}(1\ \ 4)$ et $a_4 \neq a_1, a_2, a_3$ et $\phi((1\ \ 4)) = (a_1\ \ a_4)$.

- On répète l'argument, on a a_i tel que $\phi((1\ \ i)) = (a_1\ \ a_i)$. On a donc construit une permutation $\sigma : i \mapsto a_i$ telle que $\sigma(1\ \ i)\sigma^{-1} = (a_1\ \ a_i) = \phi((1\ \ i))$.

Comme les $(1\ \ i)$ engendrent $\mathcal{S}_n$, on a $\phi(x))\sigma x \sigma^{-1}$ pour tout $x \in \mathcal{S}_n$.
D'où $\phi \in \mathrm{Int}(\mathcal{S}_n)$.

3 Compléments

- τ transposition $\implies \phi(\tau)$ d'ordre 2 car $\phi^2(\tau) = \phi(\tau \circ \tau) = \mathrm{Id}$.
- $\mathrm{Stab}(\tau) \cong \mathrm{Stab}(\phi(\tau))$ car si $\theta \in \mathrm{Stab}(\tau)$, on a :

$$\theta \circ \tau \circ \theta^{-1} = \tau \implies \phi(\theta) \circ \phi(\tau) \circ \phi(\theta)^{-1} = \phi(\tau) \implies \phi(\theta) \in \mathrm{Stab}(\phi(\tau))$$

- Si $\mathrm{Supp}(\sigma) \cap \mathrm{Supp}(\sigma') = \emptyset$ alors $\sigma \circ \sigma' = \sigma' \circ \sigma$.
En effet :
  - Si $\sigma(x) = x = \sigma'(x)$ alors $\sigma' \circ \sigma(x) = \sigma \circ \sigma'(x)$.
  - Si $x \in \mathrm{Supp}(\sigma)$ alors $x \notin \mathrm{Supp}(\sigma')$ d'où $\sigma'(x) = x$. On a donc : $\sigma \circ \sigma'(x) = \sigma(x)$.
  Or $\sigma(x) \in \mathrm{Supp}(\sigma)$ d'où $\sigma(x) \notin \mathrm{Supp}(\sigma')$ d'où $\sigma' \circ \sigma(x) = \sigma(x) = \sigma \circ \sigma'(x)$.
  On vérifie de même avec $x \in \mathrm{Supp}(\sigma')$.
- $\mathcal{S}_n$ est engendré par $((1\ \ k))_{1 \leq k \leq n}$ car $(i\ \ j) = (1\ \ i)(1\ \ j)(1\ \ i)$ et $((i\ \ j))$ engendre $\mathcal{S}_n$.

4 Références

- Cours d'algèbre, *Perrin*
- Oraux X-ENS Algèbre 1, *F-G-N*