1 Recasages

- **151 :** Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.
- **156 :** Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.
- **159 :** Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

2 Développement

Théorème :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(f_i)_{i\in I}$ une famille d'endomorphismes de E qui commutent deux à deux.
Si les f_i sont trigonalisables, alors on peut les trigonaliser dans une même base.

Preuve :

- Etape 1 :
  Montrons par récurrence sur n qu'il existe un vecteur propre commun à tous les f_i.
  - Si $n = 1$, on a bien le résultat.
  - Supposons le résultat vrai pour tout $k < n$ et montrons le au rang n.

    Si tous les f_i sont des homothéties, alors ils sont de la forme :

    $$\forall x \in E,\ f_i(x) = \lambda_i x$$

    D'où tous les f_i ont bien un vecteur propre en commun.
    Sinon, il existe une fonction f parmi les f_i qui n'est pas une homothétie.
    f est trigonalisable donc admet une valeur propre λ de sous-espace propre $E_\lambda(f)$.
    On a $\dim E_\lambda(f) < n$ (car f n'est pas une homothétie) et $E_\lambda(f)$ est stable par toutes les f_i par hypothèse de commutativité des f_i.
    Donc, par hypothèse de récurrence, il existe un vecteur propre commun à tous les $f_{i[E_\lambda(f)}$ qui est aussi vecteur propre commun à tous les f_i.

- Etape 2 :
  Montrons par récurrence sur n que les f_i sont trigonalisables dans une base commune.
  - Si $n = 1$, on a bien le résultat.
  - Supposons vrai le résultat au rang $n-1$ et montrons le au rang n.

    Les application ${}^t f_i$ sont également trigonalisables (car $\chi_{{}^t f_i} = \chi_{f_i}$) et commutent deux à deux (car les f_i commutent deux à deux).

    On applique donc l'étape 1 aux ${}^t f_i$ et donc les ${}^t f_i$ possèdent tous un vecteur propre en commun. Soit $x \in E^*$ un tel vecteur.

    On a que $\mathbb{K}x$ est stable par tous les ${}^t f_i$ donc $H = (\mathbb{K}x)^\perp$ est un hyperplan de E stable par tous les f_i.
    Par hypothèse de récurrence, il existe une base $\mathcal{B}$ de H trigonalisant tous les $f_{i|H}$ (car $\underbrace{\dim H}_{=n-1} < n$)
    Soit $e \in (\mathbb{K}x)^\perp$ tel que $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \sqcup e$ forme une base de E.
    On a alors que pour tout $i \in I$, la matrice de f_i dans la base $\mathcal{B}'$ est :

    $$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f_i) = \left[\begin{array}{ccc|c} \times & \dots & \times & \times \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ (0) & & \times & \times \\ \hline 0 & \dots & 0 & \times \end{array}\right]$$

    Donc $\mathcal{B}'$ trigonalise bien tous les f_i.
    D'où la récurrence

3 Compléments

- Si $u \circ v = v \circ u$ alors $E_\lambda(u)$ est stable par v.
  En effet :

  $$\begin{aligned} \forall x \in E_\lambda(u),\ u(x) = \lambda x &\Longrightarrow (v \circ u - \lambda v)(x) = 0 \\ &\Longrightarrow (u - \lambda id)(v(x)) = 0 \\ &\Longrightarrow v(x) \in E_\lambda(u) \end{aligned} \tag{1}$$

- On a ${}^t(u \circ v) = {}^t v \circ {}^t u$.
  En effet :

  $$\begin{aligned} \forall (x,\phi) \in E \times E^*,\ < x, {}^t(u \circ v)(\phi) > &= < (u \circ v)(x), \phi > \\ &= < v(x), {}^t u(\phi) > \\ &= < x, ({}^t v \circ {}^t u)(\phi) > \end{aligned} \tag{2}$$

- On a $\chi_{{}^t u} = \chi_u$, par définition du déterminant avec la somme sur l'ensemble des permutations, le déterminant est un invariant de transposition d'où le polynôme caractéristique aussi.

- $F \subset E$ est stable par $u \iff F^\perp \subset E^\perp$ est stable par ${}^t u$.
  Ceci vient du fait que :

$$\forall x \in F, \forall \phi \in F^\perp, < u(x), \phi > = < x, {}^t u(\phi) >$$

4 Références

- Algèbre, *Gourdon*