1 Recasages

- **170 :** Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité. Applications.
- **171 :** Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.

2 Développement

Lemme :

Soit E un espace vectoriel, F un sous espace vectoriel de E et q une forme quadratique. Si $q_{|F}$ est définie alors on a $F \bigoplus F^{\perp} = E$.

Preuve :

- Soit $x \in F \cap F^{\perp}$, on a $q(x) = \phi(x,x) = 0$.
  $q_{|F}$ étant définie, on a que $x = 0$ et donc $F \cap F^{\perp} = \{0\}$.
- Soit $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base $q_{|F}$-orthogonale de F. Soit $x \in E$. On pose :

$$\begin{cases} \lambda_i &= \dfrac{\phi(e_i,x)}{\phi(e_i,e_i)} \\ y &= \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i \in F \end{cases}$$

Pour tout $j \in \{1,...,p\}$ on a :

$$\begin{aligned} \phi(x-y,e_j) &= \phi(x,e_j) - \phi(y,e_j) \\ &= \phi(x,e_j) - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \phi(e_i,e_j) \\ &= \phi(x,e_j) - \lambda_j \phi(e_j,e_i) \\ &= \phi(x,e_j) - \phi(x,e_j) \\ &= 0 \end{aligned}$$

On a donc $x - y \in F^{\perp}$ et ainsi :

$$x = \underbrace{x-y}_{\in F^{\perp}} + \underbrace{y}_{\in F}$$

On a donc $F \bigoplus F^{\perp} = E$.

Théorème:

Soit $M = (a_{i,j})_{1 \leq i,j, \leq n}$, et pour tout $k \in \{1,...,n\}$ on note $M_k = (a_{i,j})_{1 \leq i,j, \leq k} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$.
M est définie positive si et seulement si $\det M_k > 0$.

Preuve :

- On suppose que M est définie positive.
  Soit q la forme quadratique dont M est la matrice dans la base canonique $(e_1,...,e_n)$ de $\mathbb{R}^n$.
  Pour tout $k \in \{1,...,n\}$, on a que M_k est la matrice de la restriction de q à $\mathrm{Vect}(e_1,...,e_n)$.

  q étant définie positive on a que sa restriction aussi donc sa signature est $(k,0)$ donc par critère d'inertie de Sylvester on a :

$$M_k = P^T I_k P \implies \det M_k = (\det P)^2 > 0$$

- On suppose que pour tout $k \in \{1,...,n\}, \det M_k > 0$.
  On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la taille de M.
  - Si $n = 1$, $\det M_1 > 0$ par hypothèse.
  - Supposons le résultat vrai pour tout $k < n$ et montrons le résultat au rang n.

    Soit q une forme quadratique telle que $M = \mathrm{Mat}_{(e_1,...,e_n)}(q)$.
    Notons $H = \mathrm{Vect}(e_1,...,e_{n-1})$, par hypothèse de récurrence on a que $M_{n-1} \in \mathcal{S}_{n-1}^{++}(\mathbb{R})$ et donc que $q_{|H}$ est définie positive.

    On désigne par $(e_1',...,e_{n-1}')$ une base orthonormée pour $q_{|H}$. Or, d'après le lemme précédent, on a $H \bigoplus H^{\perp} = \mathbb{R}^n$.

    Si on note e_n' un vecteur non nul de $H^{\perp}$, la famille $\mathcal{B} = (e_1',...,e_n')$ est une base de $\mathbb{R}^n$ et la matrice de q dans cette base s'écrit :

$$N = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \alpha \end{bmatrix}$$

On note P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à $\mathcal{B}$.
On a :

$$N = P^T M P \implies \det N = (\det P)^2 \det M > 0 \ \text{(hypothèse du sens indirect)}$$

Donc on a que $\alpha = \det N > 0$ et ainsi q est définie positive.
Donc on a bien que $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Application:

$A = \left(\frac{1}{1+|i-j|}\right)_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Preuve :

Soit $X \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ et $t \in]0,1[$ et $M(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Si $X^T M X > 0$ alors $0 < \int_0^1 X^T M(t) X dt = X^T \underbrace{\int_0^1 M(t)dt}_{=A} X = X^T A X$.

C'est-à-dire :

$$M(t) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \implies A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$$

Ici on a que $\frac{1}{1+|i-j|} = \int_0^1 t^{|i-j|} dt$, on introduit donc la matrice $M(t) = (t^{|i-j|})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
Montrons que $M(t)$ est définie positive pour avoir le résultat.

On pose $D_r(t) = \det((t^{|i-j|})_{1\leq i,j\leq r})$ et on montre par récurrence que $D_r(t) = (1-t^2)^{r-1}$.

- Si $r = 1$ on a $D_1(t) = 1$.
- Supposons le résultat vrai au rang r, au rang $r+1$

$$D_{r+1}(t) = \begin{vmatrix} 1 & t & \dots & t^r \\ t & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & t \\ t^r & \dots & t & 1 \end{vmatrix} \underset{C_{r+1} \leftarrow C_{r+1} - tC_r}{=} \begin{vmatrix} 1 & t & \dots & t^{r-1} & 0 \\ t & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ t^r & \dots & \dots & t & 1-t^2 \end{vmatrix}$$

D'où :

$$D_{r+1}(t) = (1-t^2) D_r(t)$$

On a donc bien la récurrence.
On a donc que pour tout $r \in \{1, ..., n\}, \det M_r(t) > 0$ donc par critère de Sylvester on a que $M(t) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ d'où $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et donc on a bien le résultat souhaité.

3 Compléments

- On a bien $X^T M(t) X > 0 \implies \int_0^1 X^T M(t) X dt > 0$ par positivité de l'intégration.
  Si on avait $\int_0^1 X^T M(t) X dt = 0$ alors $X^T M(t) X = 0$ pour tout t, ce qui est absurde.
- Savoir démontrer la loi d'inertie de Sylvester (une idée à minima).
- Savoir la formule de développement par rapport à une colonne.
- Par la même méthode on peut montrer que $H = \left(\frac{1}{i+j-1}\right)_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

4 Références

- Algèbre, *Gourdon*