1 Recasages

- **106 :** Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $GL(E)$. Applications.
- **154 :** Exemples de décompositions de matrices. Applications.
- **158 :** Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

2 Développement

Théorème :

L'application $\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) & \to & GL_n(\mathbb{R}) \\ (O,S) & \mapsto & OS \end{array} \right.$ est un homéomorphisme.

Preuve :

- Sujectivité :
  Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$, on a ${}^tMM \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
  En vertu du théorème spectral, cette matrice est donc diagonalisable. Il existe donc $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que :
  $${}^tMM = P\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n){}^tP \text{ avec } \lambda_i \in \mathbb{R}_+^*$$
  On pose :
  $$D = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) \text{ et } S = PD{}^tP$$
  On a $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ (car $\sqrt{\lambda_i} > 0$ et ${}^tS = S$) et $S^2 = {}^tMM$.

  On pose $O = MS^{-1}$, on a donc :
  $${}^tOO = {}^t(S^{-1}){}^tMMS^{-1} = {}^t(S^{-1})S^2S^{-1} = I_n \implies O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$$
  D'où :
  $$\underbrace{M}_{\in GL_n(\mathbb{R})} = \underbrace{O}_{\in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \times \underbrace{S}_{\in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})}$$

- Injectivité :
  On conserve la construction (et les notations) des matrices effectuée lors de la preuve de la surjectivité de ψ. Supposons qu'il existe deux décompositions polaires distinctes :
  $$M = OS = O'S' \text{ avec } O, O' \in \mathcal{O}'_n\mathbb{R}) \text{ et } S, S' \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$$
  On a alors :
  $$S^2 = {}^tMM = {}^t(O'S')O'S' = {}^tS'S' = S'^2$$
  Soit Q un polynôme tel que $Q(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$ (donné par exemple par les polynômes interpolateurs de Lagrange).
  On a donc :
  $$S = PD{}^tP = PQ(D^2){}^tP = Q(PD^2\,{}^tP) = Q({}^tMM) = Q(S^2) = Q(S'^2)$$
  Or S' commute avec S'^2 donc avec $Q(S'^2)$ donc avec S.
  S et S' sont donc co-diagonalisables.
  Il existe ainsi $P_0 \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que :
  $$S' = P_0\mathrm{diag}(\mu'_1, \dots, \mu'_n)P_0^{-1} \text{ et } S = P_0\mathrm{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)P_0^{-1}$$
  Or on sait que $S^2 = S'^2$, c'est-à-dire qu'on a que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\mu_i^2 = \mu_i'^2$.
  On a donc que $\mu_i = \mu'_i$ par positivité des valeurs propres de S et S'.
  On en déduit donc que $S = S'$, puis que $O = O'$.
  D'où l'injectivité de ψ.

- Continuité de ψ^{-1} :
  Montrons la continuité de ψ^{-1} par caractérisation séquentielle de la continuité.

  Soit $(M_p)_p \in GL_n(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{p \to +\infty} M_p = M \in GL_n(\mathbb{R})$.
  Par décomposition polaire (c'est-à-dire bijectivité de ψ) on peut définir :
  $$M = OS,\ O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$$
  Et
  $$\forall p \in \mathbb{N}, M_p = O_pS_p,\ O_p \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), S_p \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$$
  Il s'agit donc de montrer que $(O_p)_p$ converge vers O et $(S_p)_p$ vers S.

  On sait que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est compact donc il existe une suite extraite $(O_{\varphi(p)})_p$ qui converge vers $\overline{O} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
  On a donc :
  $$S_{\varphi(p)} = O_{\varphi(p)}^{-1}M_{\varphi(p)}$$
  Lorsque $p \to +\infty$:
  $$\overline{S} = \overline{O}^{-1}M \in GL_n(\mathbb{R}) \cap \overline{\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})} = GL_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$$
  On a donc $M = \overline{O}\ \overline{S}$ avec $\overline{O} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\overline{S} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Par unicité de la décomposition polaire, on a donc que $\overline{O} = O$ et $\overline{S} = S$.
La suite $(O_p)_p$ n'admet donc qu'une unique valeur d'adhérence O dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ qui est compact.
On a donc :

$$\lim_{p\to+\infty} O_p = O \quad \text{et} \quad \lim_{p\to+\infty} S_p = S$$

D'où la continuité de ψ^{-1}.

3 Compléments

- Continuité de ψ par continuité du produit matriciel.
  Prendre une suite de matrices et montrer la convergence pour une certaine norme, elles sont toutes équivalentes en dimension finie (par exemple la norme qui prend la somme de tous les coefficients de la matrice).

- Connaître la théorie des polynômes interpolateurs de Lagrange. Associe de manière bijective n points du plan à un polynôme de degré $n-1$.

- Plus généralement on a :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \exists (O,S) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}),\ M = OS$$

  Il suffit de raisonner par densité de $GL_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est compact dans $GL_n(\mathbb{R})$ car fermé et borné.
  En effet :

  - $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \phi^{-1}(\{I_n\})$ est fermé par continuité de $\phi : M \mapsto {}^tMM$.

  - Pour tout $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, en notant C_j ses colonnes, on a :

$$^tC_jC_j = \|C_j\|^2 = 1$$

    D'où :

$$\|A\|_2^2 = \sum_{i,j} |a_{i,j}|^2 = \sum_{j=1}^n \|C_j\|^2 = n$$

    Donc $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est borné.

4 Références

- Algèbre, *Gourdon*
- L'oral à l'agrégation de mathématiques, *Isenmann*