# 1 Recasages

- **102 :** Groupe des nombres complexes de module 1. Racines de l'unité. Applications.
- **127 :** Exemples de nombres remarquables. Exemples d'anneaux de nombres remarquables. Applications.
- **149 :** Déterminant. Exemples et applications.
- **150 :** Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.
- **152 :** Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.
- **153 :** Valeurs propres, vecteurs propres. Calculs exacts ou approchés d'éléments propres. Applications.
- **181 :** Convexité dans $\mathbb{R}^n$. Applications en algèbre et en géométrie.
- **191 :** Exemples d'utilisation de techniques d'algèbre en géométrie.
- **223 :** Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.
- **226 :** Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

# 2 Développement

**Propriété :**

Soient $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ et $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ alors on a :

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ a_3 & & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_2 & a_3 & \dots & a_n & a_1 \end{vmatrix} = \prod_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_k \omega^{jk}$$

*Preuve :*

Soit

$$C = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ a_3 & & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_2 & a_3 & \dots & a_n & a_1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & (0) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & (0) & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

On a ainsi :

$$C = \sum_{k=1}^{n} a_k J^{k-1}$$

On diagonalise $C$ en diagonalisant $J$.

Soient $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \neq 0$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.

On résout :

$$JX = \lambda X \implies \begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ \quad\vdots \\ x_n = \lambda x_{n-1} \\ x_1 = \lambda x_n \end{cases} \implies \forall i \in \{1, \dots, n\},\ x_i = \lambda^n x_i$$

On a alors que $\mathbb{U}_n = \{1, \omega, \dots, \omega^{n-1}\}$ est l'ensemble des valeurs propres de $J$ et $e_k = (1, \omega^k, \dots, \omega^{(n-1)k})$ est vecteur propre de $J$ associé à la valeur propre $\omega^k$ pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$.

On a donc que $J$ possède $n$ valeurs propres distinctes donc est diagonalisable.
Il existe donc $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que :

$$J = PDP^{-1} \quad \text{avec} \quad D = \operatorname{diag}(1, \omega, \dots, \omega^{n-1})$$

D'où :

$$\det C = \det\left(\sum_{k=1}^{n} a_k J^{k-1}\right) = \det\left(P \sum_{k=1}^{n} a_k D^{k-1} P^{-1}\right) = \prod_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_k \omega^{jk}$$

**Théorème :**

Soit $P$ un polygone dont les sommets dans le plan complexes ont pour affixes $z_1, \dots, z_n$.
On définit par récurrence $(P_k)_k$ avec $P_0 = P$ et où les sommets de $P_{k+1}$ sont les milieux des arêtes de $P_k$.
On a alors que la suite $(P_k)_k$ converge vers l'isobarycentre de $P$.

*Preuve :*

Soit $P_k$ le polygone représenté par le vecteur $Z_k = \begin{bmatrix} z_1^k \\ \vdots \\ z_n^k \end{bmatrix}$.

On a la relation de récurrence :

$$Z_{k+1} = \begin{bmatrix} \frac{z_1^k + z_2^k}{2} \\ \vdots \\ \frac{z_n^k + z_1^k}{2} \end{bmatrix} = AZ \quad \text{avec} \quad A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & (0) \\ 0 & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

On a donc :

$$Z_k = A^k Z_0 \quad \text{avec} \quad Z_0 = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}$$

Nous travaillons sur des ensembles matriciels de dimensions finies. On a donc que toutes les normes sont équivalentes donc il suffit de prouver que $(A^k)_k$ converge pour une norme quelconque.
On a :

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_2 & & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_0 \end{vmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a_0 & = & X - \frac{1}{2} \\ a_1 & = & -\frac{1}{2} \\ a_2 & = \dots = & a_{n-1} = 0 \end{cases}$$

D'après la propriété précédente sur le déterminant circulant on a :

$$\chi_A(X) = \prod_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega^{jk} = \prod_{j=0}^{n-1} X - \lambda_j \quad \text{avec} \quad \lambda_j = \frac{1 + \omega^j}{2}$$

On a que

$$\lambda_i = \lambda_j \iff i = j$$

Donc $\chi_A$ est scindé à racines simples donc $A$ est diagonalisable. Il existe donc $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$A = QDQ^{-1} \quad \text{avec} \quad D = \text{diag}(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1})$$

Par ailleurs, on a que :

$$|\lambda_j| = \left| \frac{1 + \omega^j}{2} \right| = \left| e^{\frac{ij\pi}{n}} \frac{e^{\frac{ij\pi}{n}} + e^{-\frac{ij\pi}{n}}}{2} \right| = \left| \cos \frac{j\pi}{n} \right| < 1, \ \forall 0 < j \leq n-1$$

On a donc que $\lim\limits_{k \to +\infty} \lambda_j^k = 0$ pour $j \neq 0$.

On a donc que $A^k$ converge vers $B = Q\text{diag}(1, 0, \dots, 0)Q^{-1}$ par continuité du produit matriciel. La suite $(Z_k)_k$ est donc bien convergente également de limite $X$ (car pour tout $k$, $Z_k = A^k Z_0$).

On a par ailleurs que $Z_{k+1} = AZ_k$, donc quand $k$ tend vers l'infini on a $AX = X$.

Or l'espace propre associée à la valeur propre 1 contient $\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ et est de dimension 1 car $\chi_A$ a $n$ racines distinctes.

Il existe donc $a \in \mathbb{C}$ tel que $X = \begin{bmatrix} a \\ \vdots \\ a \end{bmatrix}$, c'est-à-dire que $(P_k)_k$ converge vers $a$.

Soit $g_k$ l'isobarycentre de $P_k$ qui vérifie :

$$g_{k+1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} z_i^{k+1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{z_i^k + z_{i+1}^k}{2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} z_i^k = g_k \quad \text{car } z_{n+1}^k = z_1^k$$

On a donc que la suite $(g_k)_k$ est constante égale à l'isobarycentre de $P$ et converge vers l'isobarycentre de $X$ qui est $a$. On a donc que la suite $(P_k)_k$ converge vers l'isobarycentre de $P$.

## 3 Compléments

- Savoir démontrer l'équivalence des normes en dimension finie.
- Savoir démontrer les propriétés élémentaires sur la réduction des endomorphismes (liens entre sous-espaces propres, polynôme caractéristique, nombre de valeurs propres,...)

# 4 Références


- Algèbre, *Gourdon*
- L'oral à l'agrégation de mathématiques, *Isenmann*