1 Recasages

- **149 :** Déterminant. Exemples et applications.
- **157 :** Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.
- **213 :** Espaces de Hilbert. Exemples et applications.
- **219 :** Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et recherches.

2 Développement

Propriété :

- Une matrice carrée est une matrice de Gram si et seulement si elle est hermitienne positive.
- Une matrice de Gram de $x_1, \dots, x_n \in E$ espace hermitien est définie si et seulement si $(x_1, \dots, x_n)$ est libre.

Preuve :

- – Soit $x_1, \dots, x_n \in E$ et M leur matrice de Gram.
  Soit $F = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$, $\mathcal{B}$ une base orthonormée de F et pour tout $1 \leq i \leq n, X_i$ le vecteur colonne des coordonnées de x_i dans $\mathcal{B}$ c'est-à-dire que $< x_i, x_j >= X_i^* X_j$.

  On a $M = N^* N$ où N est la matrice dont les colonnes sont les X_i.
  On a donc :
  $$M^* = N^* N^{**} = N^* N = M$$
  C'est-à-dire que M est hermitienne.

  Par ailleurs, pour tout vecteur colonne X, on a :
  $$X^* M X = (X^* N^*)(NX) = (NX)^*(NX) = ||NX||^2$$
  Donc M est positive.

  – Réciproquement, soit $M = (a_{i,j})_{1 \leq i,j, \leq n}$ une matrice hermitienne positive.
  Il existe donc une matrice hermitienne H telle que $M = H^2 = H^* H$ (par un argument de diagonalisation, par théorème spectral).

  On note $X_1, \dots, X_n$ les colonnes de H, on a donc :
  $$a_{i,j} = X_i^* X_j =< X_i, X_j >$$
  Donc M est bien une matrice de Gram

-
$$\begin{aligned}
\text{Une matrice de Gram } M \text{ est définie } &\iff (X^* M X = 0 \implies X = 0) \\
&\iff (\|NX\|^2 = 0 \implies X = 0) \\
&\iff \ker N = \{0\} \\
&\iff 0 \text{ n'est pas valeur propre de } N \qquad (1) \\
&\iff \det N \neq 0 \\
&\iff (x_1, \dots, x_n) \text{ est libre} \\
&\text{car a pour colonnes les } X_i = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_i)
\end{aligned}$$

Théorème :

Soit $(E, < .,. >)$ un espace hermitien, $V \subseteq E$ un sous-espace vectoriel muni d'une base $(e_1, \dots, e_n)$.
$$\forall x \in E, \mathrm{d}^2(x, V) = \frac{G(e_1, \dots, e_n, x)}{G(e_1, \dots, e_n)}$$

Preuve :

On a $\mathrm{d}(x, V) = \|x - p_V(x)\|$ où p_V est la projection orthogonale sur V.
Soit $z = x - p_V(x) \in V^\perp$, on a que pour tout $1 \leq i \leq n$:
$$< e_i, p_V(x) >=< e_i, x > \quad \text{et} \quad \|x\|^2 = \|p_V(x)\|^2 + \|z\|^2$$
D'où :
$$\begin{aligned}
M(e_1, \dots, e_n, x) &= \begin{bmatrix} < e_1, e_1 > & \dots & < e_1, e_n > & < e_1, x > \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ < e_n, e_1 > & \dots & < e_n, e_n > & < e_n, x > \\ < x, e_1 > & \dots & < x, e_n > & < x, x > \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} < e_1, e_1 > & \dots & < e_1, e_n > & < e_1, p_V(x) > \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ < e_n, e_1 > & \dots & < e_n, e_n > & < e_n, p_V(x) > \\ < p_V(x), e_1 > & \dots & < p_V(x), e_n > & \|p_V(x)\|^2 + \|z\|^2 \end{bmatrix}
\end{aligned} \qquad (2)$$

Or $\det M$ est linéaire par rapport aux colonnes de M donc on a $\det M = \det P + \det Q$ avec :

$$P = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots \\ \dots & \|p_V(x)\|^2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{bmatrix} \ddots & (0) \\ \dots & \|z\|^2 \end{bmatrix}$$

Or :

$$\det P = G(e_1, \dots, e_n, p_V(x)) = 0 \quad \text{car } p_V(x) \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$$

et

$$\det Q = \|z\|^2 G(e_1, \dots, e_n) \quad \text{par développement sur la dernière colonne}$$

D'où :

$$G(e_1, \dots, e_n, x) = \det M = \det Q = \|z\|^2 G(e_1, \dots, e_n)$$

et donc :

$$\|z\|^2 = \|x - p_V(x)\|^2 = \mathrm{d}^2(x, V) = \frac{G(e_1, \dots, e_n, x)}{G(e_1, \dots, e_n)}$$

Théorème (inégalité de Hadamard):

- Si $x_1, \dots, x_n \in E, |G(x_1, \dots, x_n)| \leq \|x_1\|^2 \dots \|x_n\|^2$
- Si $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{C}^n, |\det(v_1, \dots, v_n)| \leq \|v_1\| \dots \|v_n\|$

Preuve :

- Si $(x_1, \dots, x_n)$ est liée, alors $G(x_1, \dots, x_n) = 0$, il n'y a donc rien à montrer. On montre par récurrence la propriété :

  $\mathcal{P}_n$: Pour toute famille libre $(x_1, \dots, x_n)$ on a $|G(x_1, \dots, x_n)| \leq \|x_1\|^2 \dots \|x_n\|^2$

  - Si $n = 1$, on a $G(x_1) = \|x_1\|^2 \leq \|x_1\|^2$.
  - On suppose $\mathcal{P}_n$ vraie et on considère $(x_1, \dots, x_{n+1})$ une famille libre de E. On note $F = \text{Vect}(x_1, \dots, x_{n+1})$.
    Il existe $(f, g) \in F \times F^\perp$ tel que $x_{n+1} = f + g$ avec f le projeté orthogonal de x_{n+1} sur F. Par le même raisonnement que la preuve du théorème précédent on a :

$$\begin{aligned} G(x_1, \dots, x_{n+1}) &= \|g\|^2 G(x_1, \dots x_n) \\ &\leq \|x_1\|^2 \dots \|x_n\|^2 \|g\|^2 \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &\leq \|x_1\|^2 \dots \|x_{n+1}\|^2 \\ &\text{car } \|g\|^2 \leq \|f\|^2 + \|g\|^2 = \|x_{n+1}\|^2 \text{ par orthogonalité} \end{aligned} \tag{3}$$

    D'où l'hérédité.

- Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont les colonnes sont $v_1, \dots, v_n$. On a :

$$G(v_1, \dots, v_n) = \det(M^* M) = \det M^* \cdot \det M = |\det M|^2$$

  D'où le résultat d'après le point précédent.

3 Compléments

- Si M est auto-adjointe positive alors il existe une matrice H auto-adjointe positive telle que $M = H^2$. Conséquence directe du théorème spectral.
- Interprétation géométrique, $|\det(v_1, \dots, v_n)|$ est le volume de parallélépipède engendré par $v_1, \dots, v_n$. Le volume maximal est atteint quand les angles sont droits.
- Remarque : Un espace préhilbertien de dimension finie est un espace de Hilbert, d'où V qui est un sous-espace vectoriel de E est fermé, d'où le théorème de projection :

$$\forall x \in E, \exists ! y \in V, \mathrm{d}(x, V) = \|x - y\| \quad \text{et} \quad x - y \in V^\perp$$

  En effet, pour $(e_i)_i$ une base orthonormée de V (existe par procédé de Gram-Schmidt) et pour tout $x \in E$, on définit :

$$y = \sum < x, e_k > e_k \implies < x - y, e_j > = 0 \implies x - y \in V^\perp$$

  D'où pour tout $z \in V$:

$$\|x - z\|^2 \underset{\text{Pythagore}}{=} \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2 \geq \|x - y\|^2$$

  D'où $\|x - y\| = \inf_{z \in V} \|x - z\| = \mathrm{d}(x, F)$ et ce vecteur est unique.

4 Références

- Algèbre, *Gourdon*