1 Recasages

- **181 :** Convexité dans $\mathbb{R}^n$. Applications en algèbre et en géométrie.

2 Développement

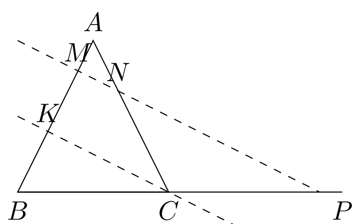
Théorème de Menelaüs :

Soit ABC un triangle non aplati et M, N, P trois points appartenant respectivement aux droites (AB), (AC), (BC) et distincts des sommets du triangle.

$$M, N, P \text{ alignés} \iff \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \times \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = 1$$

Preuve :

- On suppose que M, N et P sont alignés.
  On note K le point d'intersection de la parallèle à (MP) passant par C coupant (AB).



Par le théorème de Thalès on a :

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MK}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{MK}}{\overline{MA}} = \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}$$

En effet on a $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{NA}} = \dfrac{\overline{AK}}{\overline{MA}}$ et $\overline{AC} = \overline{AN} + \overline{NC}$ et $\overline{AK} = \overline{AM} + \overline{MK}$.

On a donc directement

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \times \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \times \frac{\overline{MB}}{\overline{MK}} \times \frac{\overline{MK}}{\overline{MA}} = 1$$

- On suppose que $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \times \dfrac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \dfrac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = 1$, on note P' l'intersection des droites (MN) et (BC).

  Le point P' existe sinon les droites (MN) et (BC) seraient parallèles et alors par le théorème de Thalèse on aurait $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \dfrac{\overline{NA}}{\overline{NC}}$ et par hypothèse on aurait $\dfrac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = 1$ et donc $B = C$ ce qui est absurde.

  On a donc :

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \times \frac{\overline{P'B}}{\overline{P'C}} \times \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \times \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = 1$$

  D'où $\dfrac{\overline{P'B}}{\overline{P'C}} = \dfrac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \implies P = P'$.

Théorème de Ceva:

Soit ABC un triangle non aplati et M, N, P trois points appartenant respectivement aux droites (AB), (AC), (BC) et distincts des sommets du triangle.

$$(CM), (AP), (BN) \text{ sont concourantes ou parallèles} \iff \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \times \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = -1$$

Preuve :

- – On suppose que les trois droites coucourent en un point R.
    Notons (α, β, γ) les données barycentriques de R dans le repère affine. On peut supposer que $\alpha + \beta + \gamma = 1$.
    - ∗ On a ,$\alpha, \beta, \gamma \neq 0$ sinon R serait sur l'un des côtés et l'un des points M, N, P serait confondu avec le sommet.
    - ∗ On a la somme de deux coefficients α, β, γ n'est jamais nulle sinon, par exemple pour $\alpha + \beta = 0$, on aurait $\overrightarrow{CR} = \alpha\overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{CB} = \alpha\overrightarrow{BA}$ et (CR) serait parallèle à (BA).

    L'associativité du barycentre montre que R est barycentre de $(A(\alpha), g(\beta + \gamma))$ où g est barycentre de $(B(\beta), C(\gamma))$.
    En effet on a $R = \alpha A + \beta B + \gamma C$ et $g = \dfrac{1}{\beta + \gamma}(\beta B + \gamma C)$ donc $R = \alpha A + (\beta + \gamma)g$.

Comme les points g, B, C d'une part et g, A, R d'autre part, sont alignés (car le barycentre d'une droite sur la droite), on a que $g = P$ (car les droites (AR), (BC) s'intersectent en un unique point) et $\beta\overrightarrow{PB} + \gamma\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{0}$ d'où $\dfrac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = -\dfrac{\gamma}{\beta}$.

En réitérant ce processus de la même manière pour les autres points on a $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = -\dfrac{\beta}{\alpha}$ et $\dfrac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = -\dfrac{\alpha}{\gamma}$.
On a donc bien :

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \times \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = -1$$

  - On suppose que les trois droites sont parallèles, dans ce cas, par théorème de Thalès on a :

$$\chi = \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \times \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CN}} \times \frac{\overline{AN}}{\overline{AC}} \times \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = -1$$

- On suppose que $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \times \dfrac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \dfrac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = -1$.
  - Si les droites (CM), (AP), (BN) sont parallèles, il n'y a rien à démontrer.
  - Si deux des trois droites sont concourantes, par exemple prenons (CM) et (AP) qui se coupent en R.
    On a alors que (BR) coupe (AC) en N'. En effet, si ce n'était pas le cas, on aurait $(BR)//(AC)$ et on aurait une configuration telle que par théorème de Thalès on aurait :

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BR}} = -\frac{\overline{PC}}{\overline{PB}} \implies \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = 1 \implies C = A \text{ ce qui est absurde}$$

On a donc :

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \times \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \frac{\overline{N'C}}{\overline{N'A}} = -1 \quad \text{et} \quad \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \times \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = -1$$

D'où $\dfrac{\overline{N'C}}{\overline{N'A}} = \dfrac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \implies N = N'$.

3 Compléments

Théorème de Thalès:

Soient deux droites $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ et A, B, C (resp. A', B', C') trois points distincts de $\mathcal{D}$ (resp. $\mathcal{D}'$) avec $A \neq A'$, $B \neq B'$ et $C \neq C'$.

$$(AA'), (BB'), (CC') \text{ sont parallèles} \iff \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$$

Preuve :

- Supposons les trois droites parallèles.
  Il existe un scalaire λ tel que $\overrightarrow{A'B'} = \lambda\overrightarrow{A'C'}$.
  La projection sur $\mathcal{D}$ parallèlement à (AB') est affine de partie linéaire une projection vectorielle π. D'où :

$$\pi(\overrightarrow{A'B'}) = \lambda\pi(\overrightarrow{A'C'}) \implies \overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AC} \implies \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$$

- Supposons que $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$.
  Soit C'' l'intersection de la droite (AB) parallèle à (AA') passant par C. Le sens direct démontré précédemment donne :

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C''}} \quad \text{or} \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}} \quad \text{par hypothèse}$$

D'où $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C''}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}} \implies C' = C''$.

4 Références

- Cours de géométrie, *Mercier*