

1 Recasages

- **162** : Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

2 Développement

Lemme :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\epsilon > 0$, il existe une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{C}^n$ telle que sa norme subordonnée $|||\cdot|||$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifie $|||A||| < \rho(A) + \epsilon$.

Preuve :

A est trigonalisable donc il existe T triangulaire et une matrice $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $A = PTP^{-1}$.

Pour $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ on définit $D_\delta = \text{diag}(1, \delta, \dots, \delta^{n-1}) \in GL_n(\mathbb{C})$, $T = (T_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et donc

$$T_\delta = D_\delta^{-1}TD_\delta = D_\delta^{-1}P^{-1}APD_\delta$$

Soit $x \in \mathbb{C}^n$, on définit la norme $\|x\| = \|(PD_\delta^{-1})x\|_\infty$ et on note $|||\cdot|||$ la norme subordonnée associée. D'où pour tout $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

$$\begin{aligned} |||B||| &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|Bx\| \\ &= \sup_{\|(PD_\delta^{-1})x\|_\infty \leq 1} \|(PD_\delta)^{-1}Bx\|_\infty \\ &= \sup_{\|y\|_\infty \leq 1} \|(PD_\delta)^{-1}BPD_\delta y\|_\infty \\ &= |||(PD_\delta)^{-1}BPD_\delta|||_\infty \end{aligned} \quad (1)$$

Or, pour tout $M = (M_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ on a $|||M|||_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |M_{i,j}|$.

On choisit alors $\delta > 0$ tel que :

$$\forall i \in [1, n-1], \sum_{j=i+1}^n \delta^{j-i} |T_{i,j}| < \epsilon$$

et on a $\rho(A) = \sup_{1 \leq i \leq n} |T_{i,i}|$ d'où :

$$\begin{aligned} |||A||| &= |||(PD_\delta)^{-1}APD_\delta|||_\infty \\ &= |||T_\delta|||_\infty \\ &= \sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |T_{\delta i,j}| \\ &\leq \rho(A) + \epsilon \end{aligned} \quad (2)$$

Définition:

Soient $A \in GL_n(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$ et $x \in \mathbb{R}^n$ l'unique solution de $Ax = b$. Si on a $(M, N) \in GL_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $A = M - N$. On dit que la méthode itérative associée à (M, N) converge si pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, la suite définie par x_0 et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $x_{k+1} = M^{-1}(Nx_k + b)$ converge.

Théorème:

La méthode itérative associée à (M, N) converge si et seulement si $\rho(M^{-1}N) < 1$.

Preuve :

Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $Ax = b$. Soit $k \in \mathbb{N}$, on définit $e_k = x_k - x$ on a donc :

$$x_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} x \iff e_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$$

On a alors :

$$Ax = b \implies Mx = b + Nx \implies x - M^{-1}b = M^{-1}Nx$$

D'où :

$$e_{k+1} = x_{k+1} - x = M^{-1}(Nx_k + b) - x = M^{-1}N(x_k - x) = M^{-1}Ne_k$$

On a donc que $e_k = (M^{-1}N)^k e_0$ ce qui ramène la convergence de la suite $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ à la suite $((M^{-1}N)^k)_{k \in \mathbb{N}}$.

- Si $\rho(M^{-1}N) < 1$, on pose $\epsilon = 1 - \rho(M^{-1}N) > 0$. D'après le lemme précédent on a :

$$|||M^{-1}N||| < \rho(M^{-1}N) + \epsilon < 1$$

On a donc :

$$\|e_k\| = \|(M^{-1}N)^k e_0\| \leq |||M^{-1}N|||^k \|e_0\|$$

On a donc bien $\lim_{k \rightarrow +\infty} e_k = 0$, d'où la convergence de la méthode.

- Par contraposé, supposons que $\rho(M^{-1}N) \geq 1$. Soit λ une valeur propre complexe de $M^{-1}N$ telle que $|\lambda| \geq 1$.
Soit v un vecteur propre associé à λ , on a donc $(M^{-1}N)^k v = \lambda^k v$.

On pose $v = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}^n$, on a donc :

$$(M^{-1}N)^k v = (M^{-1}N)^k a + i(M^{-1}N)^k b = \lambda^k a + i\lambda^k b$$

Donc une des suites $((M^{-1}N)^k a)_{k \in \mathbb{N}}$ ou $((M^{-1}N)^k b)_{k \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, la méthode itérative ne converge pas pour $x_0 = a + x$ ou $x_0 = x + b$ on a donc que (x_k) ne converge pas vers x .

3 Compléments

Définition:

On définit les méthodes suivantes :

- *Jacobi* :
 $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M = \text{diag}(A_{1,1}, \dots, A_{n,n}) = D$ et $N = M - A = D - A$.
On pose alors $J = M^{-1}N = I_n - D^{-1}A$.
- *Gauss-Seidel* :
 $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, L sa partie triangulaire inférieure, U sa partie triangulaire supérieure et D sa diagonale.
Alors $A = M - N$ avec $M = D + L$ et $N = -U$ et $\mathcal{L} = (L + D)^{-1}N$.

Théorème:

Si A est tridiagonale, alors $\rho(\mathcal{L})^2 = \rho(J)$.

Preuve :

Soit $\mu \in \mathbb{R}^*$, on pose la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} b_1 & \mu^{-1}a_2 & \dots & 0 \\ \mu a_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mu^{-1}a_n \\ 0 & \dots & \mu a_n & b_n \end{bmatrix}$$

D'où $A = A(1)$ et $A(\mu) = Q(\mu)A(1)Q(\mu)^{-1}$ où $Q(\mu) = \text{diag}(\mu, \dots, \mu^n)$.
D'où $\det A(\mu) = \det A$.

On a :

$$\begin{aligned} \det(D)\chi_{\mathcal{L}}(\lambda^2) &= \det(D + L) \det(\lambda^2 I_n - \mathcal{L}) \\ &= \det(\lambda^2 D + \lambda^2 L + N) \\ &= \lambda^n \det\left(\lambda D + \lambda L + \frac{1}{\lambda} N\right) \\ &= \lambda^n \det(\lambda D + L + N) \\ &= \lambda^n \det(D) \det(\lambda I_n - J) \\ &= \lambda^n \det(D) \chi_J(\lambda) \end{aligned}$$

On a donc que :

$$\chi_{\mathcal{L}}(\lambda^2) = 0 \iff \chi_J(\lambda) = 0$$

D'où le résultat.

4 Références

- L'oral à l'agrégation de mathématiques, *Isenmann, Pecatte*