1 Recasages

- **120 :** Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Applications.
- **122 :** Anneaux principaux. Exemples et applications.
- **142 :** PGCD et PPCM, algorithmes de calcul. Applications.

2 Développement

Théorème :

Soit $(a_j)_{1\leq j\leq r}$ des éléments non nuls et non inversibles de A un anneau principal. On note :

$$a = \prod_{j=1}^{r} \quad \text{et} \quad \pi_j : \left\{ \begin{array}{ccc} A & \to & A/(a_j) \\ x & \mapsto & \overline{x} = \pi_j(x) \end{array} \right.$$

Si les a_j sont deux à deux premiers entre eux, $\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} A & \to & \prod\limits_{j=1}^{r} A/(a_j) \\ x & \mapsto & (\pi_1(x), \dots, \pi_r(x)) \end{array} \right.$ est un morphisme d'anneaux sujectif de noyau $\ker(\phi) = (a)$ et ϕ induit un isomorphisme d'anneaux :

$$\overline{\phi} : \left\{ \begin{array}{ccc} A/(a) & \to & \prod\limits_{j=1}^{r} A/(a_j) \\ \pi(x) & \mapsto & (\pi_1(x), \dots, \pi_r(x)) \end{array} \right. \quad \text{où} \quad \pi : \left\{ \begin{array}{ccc} A & \to & A/(a) \\ x & \mapsto & \overline{x} \end{array} \right.$$

d'inverse :

$$\overline{\phi}^{-1} : \left\{ \begin{array}{ccc} \prod\limits_{j=1}^{r} A/(a_j) & \to & A/(a) \\ (\pi_1(x_1), \dots, \pi_r(x_r)) & \mapsto & \pi\left(\sum\limits_{i=1}^{r} x_i u_i b_i\right) \end{array} \right. \quad \text{où} \quad \sum_{j=1}^{r} u_j b_j = 1$$

Preuve :

- On vérifie bien que $\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} A & \to & \prod\limits_{j=1}^{r} A/(a_j) \\ x & \mapsto & (\pi_1(x), \dots, \pi_r(x)) \end{array} \right.$ est un morphisme d'anneaux car respecte la définition.

  Le noyau de ϕ est formé de tous les éléments multiples de tous les a_j donc de leur PPCM $a = \prod\limits_{j=1}^{r} a_j$ puisque les a_j sont deux à deux premiers entre eux.

- Les $b_i = \dfrac{a}{a_i}$ sont premiers entre eux dans leur ensemble.
  En effet, s'ils ne l'étaient pas, il existerait alors un élément premier p de A qui divise tous les b_i car l'anneau A est factoriel car principal.
  Comme p divise $b_1 = \prod\limits_{i=2}^{r} a_i$, il divise a_i pour $2 \leq i \leq r$.
  Or, il divise également b_i. p divise donc a_k pour $1 \leq k \neq i \leq r$ ce qui contredit le fait que a_i et a_k sont premiers entre eux.

  De ce fait, on en déduit par le théorème de Bézout qu'il existe une suite $(u_i)_{1\leq i\leq r}$ de A telle que $\sum\limits_{i=1}^{r} u_i b_i = 1$.

  Pour $1 \leq j \leq r$, on a $\pi_j(b_i) = \pi_j\left(\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{r} a_k\right) = \pi_j(0)$ pour $i \neq j$ puisque b_i est multiple de a_j.
  On a donc $\pi_j(1) = \pi_j(\sum\limits_{i=1}^{r} u_i b_i) = \pi_j(u_j)\pi_j(b_j)$.
  Donc $\pi_j(b_j)$ est inversible dans $A/(a_j)$ d'inverse $\pi_j(u_j)$.

- Pour $(\pi_j(x_j))_{1\leq j\leq r}$ donné dans $\prod\limits_{j=1}^{r} A/(a_j)$, en posant $x = \sum\limits_{i=1}^{r} x_i u_i b_i$, on a :

$$\forall 1 \leq j \leq r,\ \pi_j(x) = \pi_j(x_j)\pi_j(u_j)\pi_j(b_j) = \pi_j(x_j) \implies \phi(x) = (\pi_j(x_j))_{1\leq j\leq r}$$

D'où la sujectivité de ϕ.

On a donc également la factorisation en un isomorphisme :

$$\overline{\phi} : \left\{ \begin{array}{ccc} A/(a) & \to & \prod\limits_{j=1}^{r} A/(a_j) \\ \pi(x) & \mapsto & (\pi_1(x), \dots, \pi_r(x)) \end{array} \right.$$

On a également montré avec la sujectivité que

$$\overline{\phi}^{-1} : \left\{ \begin{array}{ccc} \prod\limits_{j=1}^{r} A/(a_j) & \to & A/(a) \\ (\pi_1(x_1), \dots, \pi_r(x_r)) & \mapsto & \pi\left(\sum\limits_{i=1}^{r} x_i u_i b_i\right) \end{array} \right.$$

Application :

On considère le système suivant :

$$\begin{cases} x & \equiv & 2 & [4] \\ x & \equiv & 3 & [5] \\ x & \equiv & 1 & [9] \end{cases}$$

Preuve :

On a $a_1 = 4$, $a_2 = 5$ et $a_3 = 9$ qui sont deux à deux premiers entre eux. Ce système a des solutions données en déterminant des coefficients dans une relation de Bézout :

$$u_1 b_1 + u_2 b_2 + u_3 b_3 = 1 \quad \text{où} \quad b_1 = 45,\ b_2 = 36,\ b_3 = 20$$

Par associativité du PGCD on a :

$$\begin{cases} b_2 \wedge b_3 & = 4 = (-1)\cdot 36 + 2 \cdot 20 \\ b_1 \wedge (b_2 \wedge b_3) & = 1 = 1 \cdot 45 + (-11) \cdot 4 \\ 1 & = 1 \cdot 45 + 11 \cdot 36 + (-22) \cdot 20 \end{cases}$$

D'où la solution particulière $x_0 = 2 \cdot 45 + 33 \cdot 36 - 22 \cdot 20 = 838$ et la solution générale est donnée par :

$$x = 838 + \underbrace{180}_{a_1 a_2 a_3 = 4 \cdot 5 \cdot 9} \times q = 118 + 180q' \implies S\begin{pmatrix} x & \equiv & 2 & [4] \\ x & \equiv & 3 & [5] \\ x & \equiv & 1 & [9] \end{pmatrix} = 118 + 180\mathbb{Z}$$

3 Références

- Mathématiques pour l'agrégation : algèbre et géométrie, *Rombaldi*