1 Recasages

- **101 :** Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications
- **103 :** Conjugaison dans un groupe. Exemples de sous-groupes distingués et quotients. Applications.
- **104 :** Groupes finis. Exemples et applications.

2 Développement

Formule de Burnside :

Soit $(G, \cdot)$ un groupe fini agissant sur un ensemble fini E.
Pour tout $g \in G$, on note $\mathrm{Fix}(g) = \{x \in E, g \cdot x = x\}$ et r le nombre d'orbites de E sous l'action de G. On a alors :

$$r = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)|$$

Preuve :

L'idée est de dénombrement $F = \{(g, x) \in G \times E, g \cdot x = x\}$ de deux manières différentes. On a :

$$F = \bigcup_{g \in G} \{(g, x) \in G \times E, x \in \mathrm{Fix}(g)\} = \bigcup_{x \in E} \{(g, x) \in G \times E, g \in \mathrm{Stab}(x)\}$$

- On a donc d'une part que :

$$|F| = \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)|$$

- D'autre part on a, en notant $G \cdot x_1, ..., G \cdot x_r$ les orbites distinctes :

$$\begin{aligned} |F| &= \sum_{x \in E} |\mathrm{Stab}(x)| \\ &= \sum_{x \in E} \frac{|G|}{|G \cdot x|} \\ &= \sum_{i=1}^{r} \sum_{x \in G \cdot x_i} \frac{|G|}{|G \cdot x|} \\ &= \sum_{i=1}^{r} |G| \sum_{x \in G \cdot x_i} \frac{1}{|G \cdot x_i|} \\ &= \sum_{i=1}^{r} |G| \\ &= r|G| \end{aligned} \tag{1}$$

On a donc bien le résultat.

Théorème de Dixon :

Soit G un groupe fini non abélien.

- Soit $Z(G)$ le centre de G, on a $[G : Z(G)] \geq 4$.
- La probabilité $p(G)$ pour que deux éléments de G tirés uniformément et indépendamment commutent est majorée par $\frac{5}{8}$.

Preuve :

- G n'est pas abélien donc on a $[G : Z(G)] \geq 2$.
  Si on avait que $[G : Z(G)]$ est égal à 2 ou 3 alors $G/Z(G)$ serait cyclique en tant que groupe de cardinal 2 ou 3 (par définition même d'un groupe qui doit contenir un élément neutre et un inverse.) mais alors G serait abélien.

  En effet, si $G/Z(G) =< a >$ alors pour tout $x, y \in G$, il existe $m, n \in \mathbb{N}$ tels que:

  $$x = a^n z_1 \ \text{ et } \ y = a^m z_2 \quad \text{où } \ z_1, z_2 \in Z(G)$$

  Alors $xy = a^n z_1 a^m z_2 = a^n a^m z_1 z_2 = a^m a^n z_2 z_1 = a^m z_2 a^n z_1 = yx$.
  Donc on a bien $[G : Z(G)] \geq 4$.

- Par définition de $p(G)$ on a :

$$p(G) = \frac{|A|}{|G|^2} \text{ avec } A = \{(x,y) \in G^2, xy = yx\}$$

On a $|A| = \sum_{x\in G} |\{y \in G, xy = yx\}| = \sum_{x\in G} |C_x|$ avec C_x le centralisateur de x.

Or $x \in Z(G) \iff C_x = G$ et donc $x \notin Z(G) \iff [G : C_x] \geq 2$ d'où $|C_x| \leq \frac{|G|}{2}$.
On a donc :

$$\begin{aligned}
p(G) &= \frac{1}{|G|^2}\left(\sum_{x\in Z(G)} |C_x| + \sum_{x\in G\setminus Z(G)} |C_x|\right) \\
&= \frac{1}{|G|^2}\left(\sum_{x\in Z(G)} |G| + \sum_{x\in G\setminus Z(G)} |C_x|\right) \\
&\leq \frac{1}{|G|^2}\left(\sum_{x\in Z(G)} |G| + \sum_{x\in G\setminus Z(G)} \frac{|G|}{2}\right) \\
&\leq \frac{1}{|G|^2}\left(|G||Z(G)| + \frac{|G|}{2}(|G| - |Z(G)|)\right) \\
&\leq \frac{1}{|G|}\left(|Z(G)| + \frac{1}{2}(|G| - |Z(G)|)\right) \\
&\leq \frac{1}{2|G|}\left(|G| + |Z(G)|\right) \\
&\leq \frac{1}{2|G|}\left(\frac{|G|}{4} + |G|\right) \quad \text{car } [G : Z(G)] \geq 4 \text{ donc } |Z(G)| \leq \frac{|G|}{4} \\
&\leq \frac{5}{8}
\end{aligned} \tag{2}$$

3 Compléments

Il semble indispensable de connaître des cas d'égalités :

- $\mathbb{H}_8$ par dénombrement élémentaire.

- $\mathbb{D}_8$ par disjonction de cas, permutation entre deux rotations, deux réflexions et une rotation et une réflexion.

4 Références

- 131 développements pour l'agrégation, *Lesesvre*