1 Recasages

- **148 :** Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.
- **151 :** Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.
- **154 :** Exemples de décomposition de matrices. Applications.
- **156 :** Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.
- **159 :** Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

2 Développement

Lemme :

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'ordre $q \geq 1$. Soit $x \in E$ quelconque tel que $u^{q-1}(x) \neq 0$, on a alors que la famille $(x, u(x), \dots, u^{q-1}(x))$ est libre et $F = \text{Vect}(x, \dots, u^{q-1}(x))$ est stable par u.

Preuve :

- Supposons par l'absurde que la famille $(x, u(x), \dots, u^{q-1}(x))$ est liée et $u^{q-1}(x) \neq 0$.

  Il existe donc des scalaires $\lambda_0, \dots, \lambda_{q-1}$ non tous nuls tel que $\sum_{k=0}^{q-1} \lambda_k u^k(x) = 0$.

  On note p le plus petit entier compris entre 0 et $q-1$ tel que $\lambda_p \neq 0$.
  On a $u^{q-1}(x) \neq 0$ d'où $p \leq q-2$ et donc :

$$\lambda_p u^p(x) + \sum_{k=p+1}^{q-1} \lambda_k u^k(x) = 0$$

  On pose $\mu_k = -\dfrac{\lambda_k}{\lambda_p}$, on a donc :

$$u^p(x) = \sum_{k=p+1}^{q-1} \mu_k u^k(x) = \sum_{j=1}^{q-1-p} \mu_{p+j} u^{p+j}(x) = 0$$

  D'où :

$$u^{q-1}(x) = u^{q-1-p}(u^p(x)) = u^{q-1-p}\left(\sum_{j=1}^{q-1-p} \mu_{p+j} u^{p+j}(x)\right) = \sum_{j=1}^{q-1-p} \mu_{p+j} u^{q+j-1}(x)$$

  Or $u^q = 0$ donc $u^{q+k} = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
  On a donc :

$$u^{q-1}(x) = \sum_{j=1}^{q-1-p} \mu_{p+j} u^{q+j-1}(x) = 0$$

  Ce qui est absurde par construction, la famille est donc libre.

- Soit $v \in F$, il existe $\lambda_0, \dots, \lambda_{q-1}$ tels que :

$$v(x) = \sum_{k=0}^{q-1} \lambda_k u^k(x) = \lambda_0 x + \cdots + \lambda_{q-1} u^{q-1}(x)$$

  D'où :

$$u(v(x)) = \sum_{k=0}^{q-1} \lambda_k u^{k+1}(x) = \lambda_0 u(x) + \cdots + \lambda_{q-1} u^q(x) = \lambda_0 u(x) + \cdots + \lambda_{q-2} u^{q-1}(x) \in F$$

  On a donc $u(F) \subset F$, d'où la stabilité.

Lemme :

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'ordre $q \geq 1$. Il existe $\varphi \in E^*$ et $x \in E$ tels que $F = \text{Vect}(x, \dots, u^{q-1}(x))$ et $G = H^\perp = \text{Vect}(\varphi, {}^t u(\varphi), \dots, ({}^t u)^{q-1}(\varphi))^\perp$ sont stables par u et $E = F \bigoplus G$.

Preuve :

On a :

- $G = H^\perp = \{y \in E, \forall \varphi \in H, \varphi(y) = 0\}$ et $\dim G + \dim H = \dim E$
- u est nilpotent d'ordre q donc ${}^t u$ car $({}^t u)^q = {}^t(u^q) = 0$, il existe alors $\phi \in E^*$ telle que $({}^t u)^{q-1}(\varphi) \neq 0$ donc il existe $x \in E$ tel que $({}^t u)^{q-1}(\varphi)(x) = \varphi(u^{q-1}(x)) \neq 0$.
  On a alors que $u^{q-1}(x) \neq 0$, d'après le lemme précédent, on a que $\dim F = \dim H = q$ et que F est stable par u.
  On a par ailleurs que H est stable par ${}^t u$ et donc que G est stable par u.

- On a $\dim F + \dim G = \dim H + \dim G = \dim G$, il reste donc à montrer que $F \cap G = \{0\}$.
  Soit $y = \sum_{k=0}^{q-1} \lambda_k u^k(x) \in F \cap G$, G étant stable par u on a que $u^{q-1}(y) \in G$.
  D'où :
  $$0 = \varphi(u^{q-1}(y)) = \sum_{k=0}^{q-1} \lambda_k \varphi(u^{q+k-1}(x)) = \lambda_0 \varphi(u^{q-1}(x))$$
  D'où $\lambda_0 = 0$.
  Par récurrence, montrons que tous les λ_j sont nuls.
  - $\lambda_0 = 0$ d'où l'initialisation.
  - Supposons que $\lambda_0 = \cdots = \lambda_j = 0$, on a donc :

    $y = \sum_{k=j+1}^{q-1} \lambda_k u^k(x)$ et $u^{q-2}(x) \in G$ par stabilité de G par u. D'où
    $$0 = \varphi(u^{q-2-j}(y)) = \sum_{k=j+1}^{q-1} \lambda_k \varphi(u^{q+k-2-j}(x)) = \lambda_{j+1} \varphi(u^{q-1}(x))$$
    D'où $\lambda_{j+1} = 0$.

  On a donc que pour tout $0 \leq k \leq q-1$, $\lambda_k = 0$ d'où $y = 0$.
  D'où $F \cap G = \{0\}$.
  D'où $E = F \bigoplus G$.

Théorème de Jordan:

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'ordre $q \geq 1$. Il existe une base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \sqcup \cdots \sqcup \mathcal{B}_r$ telle que chaque sous-espace vectoriel $E_i = \mathrm{Vect}(\mathcal{B}_i)$ est stable par u et :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_i}(u_{E_i}) = J_i = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{q_i}(\mathbb{K}) \quad \text{où} \quad q_i = \dim E_i$$

Preuve :

On procède par récurrence sur n, la dimension de l'espace E.

- Si $n = 1$, on a $u = 0$, d'où le résultat.
- On suppose le résultat vrai pour tout espace de dimension $k < n$, avec les mêmes notations que précédemment on a :

  F est stable par u donc $u_{|F}$ dans la base $\mathcal{B}_1 = (x, u(x), \ldots, u^{q-1}(x))$ s'écrit
  $$J_q = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$$
  Si $q = n$ on a l'hérédité, sinon on peut compléter $\mathcal{B}_1$ par une base $\mathcal{B}_G$ de G car $E = F \bigoplus G$.
  Or G est stable par u donc la matrice de u dans la base $\mathcal{B}_1 \sqcup \mathcal{B}_G$ est
  $$A = \begin{bmatrix} J_q & 0 \\ 0 & A_{n-q} \end{bmatrix}$$
  où $A_{n-q} \in \mathcal{M}_{n-q}(\mathbb{K})$ est la matrice de $u_{|G}$ dans $\mathcal{B}_G$.
  Cette matrice est nilpotente d'indice au plus q avec $\dim G < n$, par hypothèse de récurrence, on a donc :
  $$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_G}(u_{|G}) = A_{n-q} = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n-q}(\mathbb{K})$$
  On a donc bien l'hérédité.

D'où le résultat.

3 Compléments

- u nilpotent d'ordre $q \iff {}^t u$ nilpotent d'ordre q :
  $${}^t(u^q) = {}^t(\underbrace{u \circ \cdots \circ u}_{\text{q fois}}) = \underbrace{{}^t u \circ \cdots \circ {}^t u}_{\text{q fois}} = ({}^t u)^q$$
- $F \subset E$ stable par $u \iff F^\perp \subset E^\perp$ stable par ${}^t u$.

Ceci vient du fait que :

$$\forall x \in F, \forall \phi \in F^{\perp}, < u(x), \phi) >=< x,^t u(\phi) >$$

- De manière générale, pour tout endomorphisme u trigonalisable, il existe une base dans laquelle la matrice de u est $\operatorname{diag}(J_1, \ldots, J_p)$ avec $J_k = \begin{bmatrix} \lambda_k & & & \\ \varepsilon_{k,2} & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \varepsilon_{k,\alpha_k} & \lambda_k \end{bmatrix}$ avec $\varepsilon_{k,i} \in \{0,1\}$.

  En effet, on note $N_k = \ker(u - \lambda_k id)^{\alpha_k}$ les sous-espaces caractéristiques. Par lemme des noyaux, on a :

$$E = \bigoplus_{k=1}^{p} N_k$$

  On a $\dim N_k = \alpha_k$ et N_k stable par u et λ_k est la seule valeur propre de $u_{|N_k}$ et $(u - \lambda_k id)_{|N_k}$ est nilpotente d'indice β_k.

  On a donc d'après le théorème précédent qu'il existe une base $\mathcal{B}_k$ de N_k tel que :

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_k}(u - \lambda_k)_{|N_k} = J_k = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ \varepsilon_{k,2} & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \varepsilon_{k,\alpha_k} & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{\alpha_k}(\mathbb{K})$$

  On a donc le résultat par réunion de ces bases.

4 Références

- Mathématiques pour l'agrégation : algèbre et géométrie, *Rombaldi*