

1 Recasages

- **148** : Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.
- **150** : Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.
- **151** : Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.
- **152** : Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.
- **153** : Valeurs propres, vecteurs propres. Calculs exacts ou approchés d'éléments propres. Applications.
- **155** : Exponentielle de matrice. Applications.
- **157** : Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.
- **158** : Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

2 Développement

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geq 1$, $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E , $u \in \mathcal{S}(E)$ de matrice $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{B}$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on pose $E_\lambda(u) = \ker(\lambda \text{id} - u)$.

Lemme :

Soit $(\lambda, e_1) \in \text{Sp}(u) \times E_\lambda(u)$ avec e_1 de norme 1. Alors $(\mathbb{R}e_1)^\perp$ est stable par u .

Preuve :

Notons $H = (\mathbb{R}e_1)^\perp$.

Soit $x \in H$, on a :

$$\langle u(x), e_1 \rangle = \underset{\text{car } u \in \mathcal{S}(E)}{=} \langle x, u(e_1) \rangle = \langle x, \lambda e_1 \rangle = 0$$

On a donc $u(x) \in H$ donc $u(H) \subset H$.

Théorème spectral :

u se diagonalise en base orthonormée et il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que $P^T A P$ est diagonale.

Preuve :

- On procède par récurrence sur n .
On définit la propriété :

(H_n) : Le théorème spectral est vrai pour tout espace euclidien E tel que $\dim E \leq n$

- Si $n = 1$, (H_1) est naturellement vérifiée.
- Si $n > 1$, supposons que (H_k) est vérifiée pour tout $k < n$.

Soit $\lambda_1 \in \text{Sp}(u)$ et $e_1 \in E_{\lambda_1}(u)$ de norme 1.

Soit u_H l'endomorphisme symétrique sur $H = (\mathbb{R}e_1)^\perp$ induit par u d'après le lemme précédent.

On a $E = \mathbb{R}e_1 \oplus H$ et $\dim H < n$, donc par hypothèse de récurrence, il existe $(e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormée de H qui diagonalise u_H .

De là, $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E qui diagonalise u .

- Une matrice orthogonale est une matrice de passage entre bases orthonormées.
On a donc bien le résultat matriciel.

Application :

Déterminer le polynôme minimal de

$$\begin{bmatrix} a & b & \dots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{bmatrix}$$

Preuve :

On détermine tout d'abord le polynôme caractéristique. On a :

$$\chi(X) = \begin{vmatrix} X - a & -b & \dots & -b \\ -b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ -b & \dots & -b & X - a \end{vmatrix}$$

On additionne toutes les colonnes sur la première et on obtient alors par propriété du

déterminant :

$$\chi(X) = (X - a - (n-1)b) \begin{vmatrix} 1 & -b & \dots & -b \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -b \\ 1 & \dots & -b & X - a \end{vmatrix}$$

Ensuite, on additionne, sur chaque colonne, b fois la première, on obtient alors le déterminant d'une matrice triangulaire inférieure :

$$\chi(X) = (X - a - (n-1)b) \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & X - a + b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & \dots & 0 & X - a + b \end{vmatrix}$$

et donc :

$$\chi(X) = (X - a - (n-1)b)(X - a + b)^{n-1}$$

Or, cette matrice étant symétrique réelle, on a par le théorème spectral que son polynôme minimal est scindé à racines simples et divise le polynôme caractéristique χ . On en déduit donc que :

$$\mu(X) = (X - a - (n-1)b)(X - a + b)$$

3 Compléments

- Si on voit E comme un espace hermitien, on a que pour tout $\lambda \in \text{Sp}(A)$, λ est à valeur réelle.

Soit donc $\lambda \neq \mu \in \text{Sp}(A)$ et $x \in E_\lambda(A) \setminus \{0\}$.

On a $Ax = \lambda x$ donc

$$\bar{x}^T Ax = \lambda \bar{x}^T x$$

Or $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ donc :

$$\bar{x}^T Ax = (\overline{Ax})^T x = \bar{\lambda} \bar{x}^T x$$

Or $\bar{x}^T x \neq 0$ donc $\lambda = \bar{\lambda}$ et donc $\lambda \in \mathbb{R}$.

- En voyant E comme un espace euclidien on a que pour tout $\lambda \neq \mu \in \text{Sp}(A)$, $E_\lambda(A) \perp E_\mu(A)$.

Soit $(x, y) \in E_\lambda(A) \times E_\mu(A)$, on a :

$$\lambda \langle x, y \rangle = \langle \lambda x, y \rangle = \langle Ax, y \rangle = \langle x, A^T y \rangle = \langle x, Ay \rangle = \mu \langle x, y \rangle$$

Or $\lambda \neq \mu$ donc $\langle x, y \rangle = 0$ et donc $E_\lambda(A) \perp E_\mu(A)$.

4 Références

- Mathématiques pour l'agrégation : algèbre et géométrie, *Rombaldi*