1 Recasages

- **203 :** Utilisation de la notion de compacité.
- **219 :** Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.
- **223 :** Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.
- **226 :** Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.
- **229 :** Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.
- **253 :** Utilisation de la notion de convexité en analyse.

2 Résultats préliminaires

Définition:

Soit $\phi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ et $\alpha > 0$. ϕ est α-convexe si :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d, \forall t \in [0,1],\ \phi(tx + (1-t)y) \leq t\phi(x) + (1-t)\phi(y) - \alpha t(1-t)\|x-y\|^2$$

Lemme:

Soit $\phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$.

$$\phi \text{ est } \alpha\text{-convexe} \iff \forall x, y \in \mathbb{R}^d,\ \phi(y) - \phi(x) \geq \langle \nabla\phi(x), y - x\rangle + \alpha\|y-x\|^2$$

Preuve :

- Supposons que ϕ est α-convexe. On a pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$:

$$\begin{aligned} &\phi(x + t(y-x)) \leq \phi(x) + t[\phi(y) - \phi(x)] - \alpha t(1-t)\|y-x\|^2 \\ &\implies \frac{\phi(x+t(y-x)) - \phi(x)}{t} \leq \phi(y) - \phi(x) - \alpha t(1-t)\|y-x\|^2 \\ &\xrightarrow[t\to 0^+]{} \frac{d}{dt}(\phi(x+t(y-x))_{|t=0} = \langle \nabla\phi(x), y-x\rangle \leq \phi(y) - \phi(x) - \alpha\|y-x\|^2 \end{aligned} \tag{1}$$

D'où $\phi(y) - \phi(x) \geq \langle \nabla\phi(x), y-x\rangle + \alpha\|y-x\|^2$

- Supposons que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d,\ \phi(y) - \phi(x) \geq \langle \nabla\phi(x), y-x\rangle + \alpha\|y-x\|^2$$

On pose $z = tx + (1-t)y \in \mathbb{R}^d$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$, on a $z - x = (1-t)(y-x)$ et en appliquant l'équation supposée vraie avec x et z :

$$\begin{aligned} \phi(z) &\leq \phi(x) + \langle \nabla\phi(z), z-x\rangle - \alpha\|z-x\|^2 \\ &\leq \phi(x) + (1-t)\langle \nabla\phi(z), y-x\rangle - \alpha(1-t)^2\|y-x\|^2 \end{aligned} \tag{2}$$

Par ailleurs on a $z - y = -t(y-x)$ et en appliquant l'équation supposée vraie avec y et z :

$$\begin{aligned} \phi(z) &\leq \phi(y) + \langle \nabla\phi(z), z-y\rangle - \alpha\|z-y\|^2 \\ &\leq \phi(y) - t\langle \nabla\phi(z), y-x\rangle - \alpha t^2\|y-x\|^2 \end{aligned} \tag{3}$$

En combinant (2) et (3) on a :

$$\begin{aligned} \phi(tx + (1-t)y) = \phi(z) &= t\phi(z) + (1-t)\phi(z) \\ &\leq t\phi(x) + t(1-t)\langle \nabla\phi(z), y-x\rangle - \alpha t(1-t)^2\|y-x\|^2 \\ &\quad + (1-t)\phi(y) - t(1-t)\langle \nabla\phi(z), y-x\rangle - \alpha t^2(1-t)\|y-x\|^2 \\ &\leq t\phi(x) + (1-t)\phi(y) - \alpha t(1-t)\|y-x\|^2 \end{aligned} \tag{4}$$

3 Développement

Théorème:

Soit $\phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ une fonction α-convexe.
ϕ admet un unique minimum atteint en x^*.
Soit $x_0 \in \mathbb{R}^d$, on considère la suite :

$$x_{n+1} = x_n + \lambda_n \nabla\phi(x_n) \quad \text{avec} \quad \lambda_n = \begin{cases} \underset{t\in\mathbb{R}}{\operatorname{argmin}}\ \phi(x_n + t\nabla\phi(x_n)) & \text{si} \quad x_n \neq x^* \\ 0 & \text{si} \quad x_n = x^* \end{cases}$$

Cette suite est bien définie et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x^*$.

Preuve :

- On montre que ϕ admet un unique minimum atteint en x^*.

  D'après le lemme, ϕ étant α-convexe, on pour tout $x \in \mathbb{R}^d$:

$$\phi(x) \geq \phi(0) + \langle \nabla\phi(0), x\rangle + \alpha\|x\|^2$$

  On a donc :

$$\lim_{\|x\|\to+\infty} \phi(x) = +\infty$$

  C'est-à-dire que ϕ est coercive.
  Il existe donc $M > 0$ tel que pour tout $\|x\| \geq M,\ \phi(x) > \phi(0)$.
  La fonction ϕ est continue sur le compact $\overline{B(0,M)}$ (fermé borné en dimension finie) donc est bornée et atteint son minimum en un point x^*.
  Ce minimum est global car pour tout $\|x\| > M,\ \phi(x) > \phi(0) \geq \phi(x^*)$.
  En particulier, x^* est un point critique donc $\nabla\phi(x^*) = 0$. Ainsi, pour tout $y \neq x^*$ on a :

$$\phi(y) \geq \phi(x^*) + \cancel{\langle \nabla\phi(x^*), x - x^*\rangle} + \alpha\|x - x^*\|^2 > \phi(x^*)$$

  Donc x^* est l'unique minimum de ϕ.

- On montre que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

  Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, t \in [0,1]$ et $\varphi_n(\lambda) = \phi(x_n + \lambda\nabla\phi(x_n))$.

  On a :

$$\begin{aligned} \varphi_n(t\lambda + (1-t)\mu) &= \phi\left(x_n + (t\lambda + (1-t)\mu)\nabla\phi(x_n)\right) \\ &= \phi\left(t(x_n + \lambda\nabla\phi(x_n)) + (1-t)(x_n + \mu\nabla\phi(x_n))\right) \\ &\leq t\phi(x_n + \lambda\nabla\phi(x_n)) + (1-t)\phi(x_n + \mu\nabla\phi(x_n)) \\ &\quad - \alpha t(1-t)\|x_n + \mu\nabla\phi(x_n) - x_n - \lambda\nabla\phi(x_n)\|^2 \\ &\leq t\varphi_n(\lambda) + (1-t)\varphi_n(\mu) - \alpha\|\nabla\phi(x_n)\|t(1-t)|\lambda - \mu| \end{aligned} \tag{5}$$

  On a donc que φ_n est $\alpha\|\nabla\phi(x_n)\|$-convexe donc coercive d'après le point précédent donc la fonction φ_n admet un unique minimum λ_n toujours d'après le point précédent.
  La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bien définie.

- On montre désormais la convergence de l'algorithme.
  On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\varphi_n'(\lambda_n) = 0 = \langle \nabla\phi(x_{n+1}), \nabla\phi(x_n)\rangle$$

  On a donc que $\nabla\phi(x_{n+1}) \perp \nabla\phi(x_n)$.

  Par ailleurs, la suite $(\phi(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par $\phi(x^*)$ (car la fonction ϕ est minorée) et décroissante car :

$$\phi(x_n) - \phi(x_{n+1}) \geq \cancel{\langle \nabla\phi(x_{n+1}), \underbrace{x_n - x_{n+1}}_{=\lambda_n\nabla\phi(x_n)}\rangle} + \alpha\|x_{n+1} - x_n\|^2 \geq 0$$

  La suite $(\phi(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est donc convergente et la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prend ses valeurs sur la compact $K = \{x \in \mathbb{R}^d,\ \phi(x^*) \leq \phi(x) \leq \phi(x_0)\}$
  En particulier on a :

$$\phi(x_n) - \phi(x_{n+1}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

  Et donc :

$$x_n - x_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

  En outre, $\nabla\phi$ étant continue sur le compact K, par théorème de Heine on a donc l'uniforme continuité et donc :

$$\nabla\phi(x_n) - \nabla\phi(x_{n+1}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

  Et par théorème de Pythagore on a :

$$\|\nabla\phi(x_n)\|^2 \leq \|\nabla\phi(x_n)\|^2 + \|\nabla\phi(x_{n+1})\|^2 = \underbrace{\|\nabla\phi(x_n) - \nabla\phi(x_{n+1})\|^2}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$$

Et donc :

$$\nabla\phi(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{6}$$

Soit $\overline{x}$ une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (car la suite est définie sur le compact K).
Par continuité de $\nabla\phi$ on a donc :

$$\nabla\phi(x_{\varphi(n)}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \nabla\phi(\overline{x}) \tag{7}$$

On a donc finalement, en combinant les résultats de (6) et (7) :

$$0 = \langle\nabla\phi(x_{\varphi(n)+1}), \nabla\phi(x_{\varphi(n)})\rangle \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \|\nabla\phi(\overline{x})\|^2$$

On a donc $\nabla\phi(\overline{x}) = 0$ et donc $\overline{x} = x^*$ (car ϕ est α-convexe donc en particulier convexe et de classe $\mathcal{C}^1$ donc x minimum $\iff \nabla\phi(x) = 0$).

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans le compact K admet un unique valeur d'adhérence x^*, on a donc bien la convergence souhaitée.

4 Compléments

- Une suite bornée avec une unique valeur d'adhérence converge.
  En effet, en raisonnant par l'absurde.
  Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une telle suite ne convergeant pas vers l. Alors :

  $$\exists\varepsilon > 0, \forall N\in\mathbb{N}, \exists n \geq N,\ |u_n - l| \geq \varepsilon$$

  Alors $A = \{n\in\mathbb{N},\ |u_n - l| \geq \varepsilon\}$ est infini.
  Pour $\sigma : \mathbb{N} \to A$ strictement croissante on a pour tout entier n, $|u_{\sigma(n)} - l| > \varepsilon$.
  Or $(u_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée car $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est.
  On extrait donc une sous-suite convergente (par théorème de Bolzano-Weierstrass).
  Il existe $\sigma' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $u_{\sigma\circ\sigma'(n)} \longrightarrow l'/$
  On a donc $|u_{\sigma\circ\sigma'(n)} - l| \geq \varepsilon$ et donc lorsque n tend vers $+\infty$ on a $|l' - l| \geq \varepsilon$.
  On a donc $l = l'$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a alors deux valeurs d'adhérences distinctes.
  D'où l'absurdité.

- Une fonction coercive admet et atteint son minimum.
  - Soit $S_\alpha = \{x\in\Omega,\ f(x) \leq \alpha\}$ l'ensemble de niveau α qui est compact.
    En effet, ils sont bornés car sinon l'un d'entre eux a une suite (x_k) telle que $\|x_k\| \longrightarrow +\infty$ mais alors $f(x_k) \longrightarrow +\infty$ par coercivité de f, ce qui contredit l'appartenance des x_k à une même ligne de niveau.

    Ils sont fermés car si $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in S_\alpha^{\mathbb{N}}$ converge vers $l\in\Omega$.
    Par continuité de f on a $f(l) = \lim\limits_{k\to+\infty} f(x_k) \leq \alpha$ et donc $l \in S_\alpha$. On conclut donc par caractérisation séquentielle des fermés.

    Les S_α sont donc compacts car fermés bornés en dimension finie.
  - Minimiser f sur Ω revient à minimiser f sur ses lignes de niveau non vide (qui sont compacts), on a donc bien le résultat.

5 Références

- Oraux X-ENS Analyse 4, *F-G-N*