1 Recasages

- **209 :** Approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples d'applications.
- **230 :** Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.
- **241 :** Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.
- **246 :** Séries de Fourier. Exemples et applications.

2 Développement

Théorème:

$$\int_0^{+\infty} \sin(t^2)dt = \int_0^{+\infty} \cos(t^2)dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Preuve :

- On montre que :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}du \quad \text{et} \quad J = \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi s^2} ds \quad \text{convergent}$$

On a :

  - En 0 :
    On a :
    $$\left|\frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{u}} \quad \text{qui est intégrable sur} \quad]0,1]$$
    $\frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}$ est donc bien intégrable en 0 par critère de majoration.
  - En $+\infty$:
    Soit $A \geq 1$, par intégration par partie on a :
    $$\int_1^A \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}du = \frac{e^{iA}}{i\sqrt{A}} - \frac{e^i}{i} + \frac{1}{2i}\int_1^A \frac{e^{iu}}{u^{\frac{3}{2}}}du \tag{1}$$
    Or :
    $$\frac{e^{iA}}{i\sqrt{A}} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad \left|\frac{e^{iu}}{u^{\frac{3}{2}}}\right| \leq \frac{1}{u^{\frac{3}{2}}} \quad \text{qui est intégrable sur} \quad [1,+\infty[$$
    Dans l'expression (1), le terme de droite converge donc celui de gauche également.

  I est donc bien définie.
  Pour J, on effectue le changement de variable $u = 2\pi s^2$, on a donc :
  $$\int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi s^2} ds = \int_0^{+\infty} \frac{e^{iu}}{2\sqrt{2\pi}\sqrt{u}}du = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}I$$
  J est donc bien définie.

- Soit $x \in [0,1[$ et $f(x) = e^{2i\pi x^2}$. On montre que f est somme de sa série de Fourier et que son coefficient de fourier est donné pour tout entier n par :

$$c_n(f) = e^{-i\frac{\pi n^2}{2}} \int_{-\frac{n}{2}}^{-\frac{n}{2}+1} e^{2i\pi s^2} ds$$

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ et on la 1-périodise sur $\mathbb{R}$ donc la série de Fourier de f converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$.
On a :

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \int_0^1 f(x)e^{-2i\pi nx}dx \\ &= \int_0^1 e^{2i\pi(x^2-nx)}dx \\ &= \int_0^1 e^{2i\pi\left(\left(x-\frac{n}{2}\right)^2-\frac{n^2}{4}\right)}dx \\ &= e^{-i\frac{\pi n^2}{2}} \int_0^1 e^{2i\pi\left(x-\frac{n}{2}\right)^2}dx \\ &= e^{-i\frac{\pi n^2}{2}} \int_{-\frac{n}{2}}^{-\frac{n}{2}+1} e^{2i\pi s^2}ds \end{aligned} \tag{2}$$

- On calcule J puis on montre que les intégrales de Fresnel convergent et on détermine leur valeur.

Soit $k \in \mathbb{Z}$, on a :

$$c_{2k}(f) = \int_{-k}^{-k+1} e^{2i\pi s^2}ds$$

Ainsi :

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_{2k}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-k}^{-k+1} e^{2i\pi s^2}ds = J$$

Et on a (car la série de Fourier de f converge vers f) :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{2i\pi nx}$$

En $x = 0$ et en $x = \frac{1}{2}$ on a :

$$f(0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) \quad \text{et} \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)(-1)^n$$

Et donc :

$$J = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_{2k}(f) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)(1 + (-1)^n) = \frac{f(0) + f\left(\frac{1}{2}\right)}{2}$$

On a donc :

$$J = \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi s^2} ds = \frac{1+i}{2} \tag{3}$$

De (3) on déduit :

$$\Re(J) = \int_{\mathbb{R}} \cos(2\pi s^2) ds = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \Im(J) = \int_{\mathbb{R}} \sin(2\pi s^2) ds = \frac{1}{2}$$

Et donc par un argument de parité on a :

$$\int_0^{+\infty} \cos(2\pi s^2) ds = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \sin(2\pi s^2) ds = \frac{1}{4}$$

On effectue le changement de variable $t = \sqrt{2\pi} s$ et on obtient finalement :

$$\int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

3 Compléments

- Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ et périodique (2π-périodique par exemple) alors la série de Fourier de f converge normalement vers f.
  f est de classe $\mathcal{C}^1$ et 2π-périodique donc :

  $$f' \in \mathcal{C}^0_{2\pi} \subset L^2_{2\pi}$$

  Et donc par formule de Parseval on a :

  $$\sum |c_n(f')|^2 = \sum |nc_n(f)|^2 = \|f'\|_2^2$$

  Et donc :

  $$\begin{aligned} \sum |c_n(f)| &= \sum |nc_n(f)| \cdot \frac{1}{|n|} \\ &\leq \left(\sum |nc_n(f)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum \frac{1}{|n|^2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{par Cauchy-Schwarz} \\ &< +\infty \end{aligned} \tag{4}$$

4 Références

- 131 Développements pour l'oral, *Lesesvre*