1 Recasages

- **201 :** Espaces de fonctions. Exemples et applications.
- **203 :** Utilisation de la notion de compacité.
- **205 :** Espaces complets. Exemples et applications.
- **208 :** Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

2 Développement

Théorème :

L'ensemble F des fonctions continues nulles part dérivables sur $[0,1]$ est dense dans $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), ||\cdot||_\infty)$.

Preuve :

On note $\mathcal{C}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $I=[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme $||\cdot||_\infty$.
On admet que $(\mathcal{C}, ||\cdot||_\infty)$ est complet.
Pour $\varepsilon>0$ et $n\in\mathbb{N}$ on pose :

$$U_{\varepsilon,n}=\{f\in\mathcal{C}, \forall x\in I, \exists y\in I, 0<|y-x|<\varepsilon, |f(y)-f(x)|>n|y-x|\}$$

- Etape 1:
  Montrons que $U_{\varepsilon,n}$ est ouvert, pour cela, on montre que $U^c_{\varepsilon,n}=E\backslash U_{\varepsilon,n}$ est fermé.
  On remarque que :

  $$U^c_{\varepsilon,n}=\{f\in\mathcal{C}, \exists x\in I, \forall y\in I, 0<|y-x|<\varepsilon, |f(y)-f(x)|\leq n|y-x|\}$$

  On raisonne donc par caractérisation séquentielle des fermés.
  Soit $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}\in(U^c_{\varepsilon,n})^{\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers $f\in\mathcal{C}$, il s'agit de montrer que $f\in U^c_{\varepsilon,n}$.
  Pour tout $p\in\mathbb{N}$, on a $f_p\in U^c_{\varepsilon,n}$ donc :

  $$\exists x_p\in I, \forall y\in I, |y-x_p|<\varepsilon, |f_p(y)-f_p(x_p)|\leq n|y-x-p|$$

  La suite (x_p) prend ses valeurs dans le compact I donc on peut extraire une sous-suite convergente $(x_{\varphi(p)})$ dont nous notons x la limite.

  Soit $y\in I$ tel que $0<|y-x|<\varepsilon$, il existe $P\in\mathbb{N}$ tel que $0<|y-x_{\varphi(p)}|<\varepsilon$ pour tout $p\geq P$.
  On a ainsi :

  $$|f_{\varphi(p)}(y)-f_{\varphi(p)}(x_{\varphi(p)})|\leq n|y-x_{\varphi(p)}|$$

  On a que f est continue en x et (f_p) converge vers f au sens de $||\cdot||_\infty$ d'où :

  $$\begin{cases} |f(x_{\varphi(p)})-f(x)| \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0 & \text{par continuité de } f \\ |f_{\varphi(p)}(x_{\varphi(p)})-f(x_{\varphi(p)})| \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0 & \text{car } \lim\limits_{p\to+\infty} ||f_{\varphi(p)}-f||_\infty=0 \end{cases}$$

  D'où :

  $$\lim_{p\to+\infty}|f_{\varphi(p)}(x_{\varphi(p)})-f(x)|=0$$

  Il vient donc :

  $$\begin{aligned} &\exists x\in I, \forall y\in I \\ &|f(x)-f(y)|\leq |f(x)-f_{\varphi(p)}(x_{\varphi(p)})|+\underbrace{|f_{\varphi(p)}(x_{\varphi(p)})-f_{\varphi(p)}(y)|}_{\leq n|x_{\varphi(p)}-y|}+|f_{\varphi(p)}(y)-f(y)| \\ &\leq \underbrace{|f(x)-f_{\varphi(p)}(x_{\varphi(p)})|}_{\underset{p\to+\infty}{\longrightarrow}0}+\underbrace{n|x_{\varphi(p)}-y|}_{\underset{p\to+\infty}{\longrightarrow}n|x-y|}+\underbrace{|f_{\varphi(p)}(y)-f(y)|}_{\underset{p\to+\infty}{\longrightarrow}0} \\ &\leq n|x-y| \quad \text{à partir d'un certain rang} \end{aligned} \tag{1}$$

  On a donc que $f\in U^c_{\varepsilon,n}$ donc $U^c_{\varepsilon,n}$ est fermé par caractérisation séquentielle des fermés et donc $U_{\varepsilon,n}$ est ouvert.

- Etape 2 :
  Montrons que $U_{\varepsilon,n}$ est dense dans $\mathcal{C}$.

  Soit $f\in\mathcal{C}$ et $\delta>0$, il s'agit de trpuver $g\in U_{\varepsilon,n}$ tel que $||f-g||_\infty\leq\delta$.
  On va cherche g sous la forme $f(x)+\delta\sin(Nx)$ en choisissant des valeurs adaptées.
  Par théorème de Heine, I étant compact, on a que f est uniformément continue sur I.
  D'où :

  $$\exists\alpha\in]0,\varepsilon[, \forall(x,y)\in I^2, |x-y|<\alpha \implies |f(x)-f(y)|<\frac{\delta}{4}$$

  On choisit $N>2\pi$ tel que $\frac{4\pi}{N}<\alpha$ et $\frac{\delta N}{8\pi}>n$.
  Posons $g(x)=f(x)+\delta\sin(Nx)$.
  Soit $x\in I$, on a qu'il existe $y\in I$ tel que :

  $$2\pi\leq|Nx-Ny|\leq 4\pi \quad \text{et} \quad |\sin(Nx)-\sin(Ny)|\geq 1$$

En particulier :

- $\dfrac{2\pi}{N} \leq |x-y| \leq \dfrac{4\pi}{N}$ d'où $|x-y| < \alpha$ et donc par uniforme continuité on a :
$$\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right| \leq \frac{\delta}{4} \times \frac{N}{2\pi} = \frac{\delta N}{8\pi}$$
- $\left|\dfrac{\delta\sin(Ny)-\delta\sin(Nx)}{y-x}\right| \geq \dfrac{\delta}{|y-x|} \geq \dfrac{\delta N}{4\pi}$

On a donc :
$$\begin{aligned}\left|\frac{g(y)-g(x)}{y-x}\right| &= \left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x} + \frac{\delta\sin(Ny)-\delta\sin(Nx)}{y-x}\right| \\ &\geq \left|\frac{\delta\sin(Ny)-\delta\sin(Nx)}{y-x}\right| - \left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right| \\ &\geq \frac{\delta N}{4\pi} - \frac{\delta N}{8\pi} \\ &\geq n\end{aligned} \tag{2}$$

On a donc que $g \in U_{\varepsilon,n}$ et $||f-g||_\infty = \delta$.
D'où la densité de $U_{\varepsilon,n}$ dans $\mathcal{C}$.

- Etape 3 :
On conclut avec le lemme de Baire.

Posons $R = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_{\frac{1}{n},n}$.
On a $\mathcal{C}$ qui est complet donc est un espace de Baire.
R est une intersection dénombrable d'ouverts denses dans $\mathcal{C}$ d'après les deux premières étapes.
On a donc que $R \subset \mathcal{C}$ est dense dans $\mathcal{C}$.

Montrons donc que $R \subset F$.
Soit $f \in R$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f \in U_{\frac{1}{n},n}$ donc pour $x \in I$ on a :
$$\exists x_n \in I, 0 < [x - x_n[< \frac{1}{n}, \left|\frac{f(x)-f(x_n)}{x-x_n}\right| > n$$
La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet donc x pour limite et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{f(x)-f(x_n)}{x-x_n}\right| = +\infty$ ce qui montre que f n'est pas dérivable en x.
Ceci étant vrai pour tout $x \in I$, on a donc que f est nul part dérivable.
On a donc :
$$R \subset F \subset \mathcal{C}$$
R étant dense dans $\mathcal{C}$, on a donc que F l'est aussi.

3 Compléments

- $(\mathcal{C}, ||\cdot||_\infty)$ est complet.
Ceci vient du fait que $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}(I,\mathbb{R})$ (conséquence du théorème des bornes atteintes) et $\mathcal{C}$ est fermé (par caractérisation séquentielle) et $\mathcal{B}(I,\mathbb{R})$ est complet (par démonstration directe) et donc on a bien le résultat (par caractérisation séquentielle des fermés).

- $A \subset B \subset E$ avec A dense dans E implique que B est dense dans E.
En effet, on a $\overline{A} = E$ et l'adhérence est croissante pour l'inclusion (par caractérisation séquentielle de l'adhérence).
On a donc que $E = \overline{A} \subset \overline{B} \subset E$.
Donc $\overline{B} = E$.

- Savoir démontrer le théorème de Heine.
Par l'absurde en supposant qu'une fonction continue sur un compact n'est pas uniformément continue, écrire la définition en passant par les suites extraites.

- Savoir démontrer le lemme de Baire.
Pour la version des ouverts par exemple, il s'agit de considérer une intersection d'ouverts denses et de constuire à partir de ça une nouvelle suite d'ouverts denses telles que l'intersection est dense également.

4 Références

- Analyse, *Gourdon*