1 Recasages

- **155 :** Exponentielle de matrice. Applications.
- **156 :** Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.
- **162 :** Systèmes d'équations linéaires : opérations élémentaires, aspects algorithimiques et conséquences théoriques.
- **221 :** Equations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

2 Développement

Lemme :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ telle que $\Re(\lambda) < 0$.
Pour toute norme d'algèbre $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe $\alpha > 0$ et $K > 0$ tels que pour tout $t \geq 0$, $\|e^{tA}\| \leq Ke^{-\alpha t}$

Preuve :

A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ donc est trigonalisable donc par décomposition de Dunford on a :

$$A = D + N \text{ avec } D \text{ diagonalisable, } N \text{ nilpotente et } DN = ND$$

N et D sont trigonalisables dans une base commune car ces deux matrices commutent.
Il existe alors $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que :

$$N = P \begin{bmatrix} 0 & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & 0 \end{bmatrix} P^{-1} \text{ et } D = P \underbrace{\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)}_{=\Delta} P^{-1}$$

- On a $e^{t\Delta} = \mathrm{diag}(e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_n})$ et $||e^{t\Delta}||_\infty = \sup\limits_i |e^{t\lambda_i}| = e^{-ct}$ où $c = -\sup\limits_i \Re(\lambda_i) > 0$.

  Par équivalence des normes en dimension finie on a qu'il existe $K_1 > 0$ tel que :

  $$\|e^{t\Delta}\| \leq K_1 e^{-ct}$$

- De plus, étant donné que $e^{tD} = Pe^{t\Delta}P^{-1}$, on a que pour tout $t \geq 0$:

  $$\|e^{tD}\| \leq \|P\| \cdot \|e^{t\Delta}\| \cdot \|P^{-1}\| \leq \underbrace{(\|P\| \cdot K_1 \cdot \|P^{-1}\|)}_{=K_2} e^{-ct}$$

- Enfin, N étant nilpotente, on a que $e^{tN} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} N^k$ où m est l'indice de nilpotence de N.
  C'est-à-dire qu'on a $\|e^{tN}\| \underset{t \to +\infty}{=} o(t^m)$.
  Or $t^m \underset{t \to +\infty}{=} o(e^{\frac{ct}{2}})$ et $\|e^{tA}\| \leq \|e^{tD}\| \cdot \|e^{tN}\|$.
  On a donc :

  $$e^{tA} = o(t^m e^{-ct}) = o(e^{-\alpha t}) \text{ avec } \alpha = \frac{c}{2} > 0$$

Théorème :

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \cup \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(B) = \{\lambda, \Re(\lambda) < 0\}$ et $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Il existe une unique solution $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de l'équation $AX + XB = C$.

Preuve :

Soit le problème de Cauchy suivant :

$$(E) : \begin{cases} Y' &= AY + YB \\ Y(0) &= C \end{cases}$$

(E) est une équation différentielle linéaire à coefficients constants et on remarque que $Y : t \mapsto e^{tA}Ce^{tB}$ convient.

- Existence :
  On intègre (E) entre 0 et $t \geq 0$ et on obtient :

  $$(E') : Y(t) - C = A \left(\int_0^t Y(s)ds \right) + \left(\int_0^t Y(s)ds \right) B$$

  D'après le lemme précédent, on a qu'il existe $K, K' > 0$ et $\alpha > 0$ tels que :

  $$\|e^{tA}\| \leq Ke^{-\alpha t} \text{ et } \|e^{tB}\| \leq K'e^{-\alpha t}$$

  On a donc que pour tout $t \geq 0$:

  $$\|Y(t)\| \leq \|e^{tA}\| \cdot \|C\| \cdot \|e^{tB}\| \leq KK'\|C\|e^{-2\alpha t}$$

Par critère de majoration on a donc que $\displaystyle\int_0^{+\infty} Y(s)ds$ converge absolument et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} Y(t) = 0$.
Par passage à la limite dans (E') on obtient donc :

$$C = AX + XB \quad \text{avec} \quad X = -\int_0^{+\infty} e^{tA}Ce^{tB}dt$$

- Unicité :
  On considère l'endomorphisme :

$$\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ X & \mapsto & AX + XB \end{array} \right.$$

  ϕ est sujective d'après la preuve de l'existence donc injective par égalité des dimensions donc est bijective, d'où l'unicité.

3 Compléments

- Savoir démontrer le théorème de co-trigonalisation de deux matrices commutantes. (c.f. le développement associé)
- Savoir démontrer l'équivalence des normes en dimension finie.
- Savoir démontrer les propriétés élémentaires sur l'exponentielle de matrices.
- Savoir démontrer la décomposition de Dunford.
  Gardons les mêmes notations que dans la démonstration du lemme.

  Soit $N_k = \ker(u - \lambda_k id)^{m_k}$ les sous-espaces caractéristiques et $v_k = u_{|N_k} - \lambda_k id_{|N_k}$.
  Les N_k sont stables par u (car $(u - \lambda_k id)^{m_k}$ et u commutent) et les v_k sont nilpotents.
  En notant $d_k = \lambda_k id_{|N_k}$ on a :

$$u_{|N_k} = v_k + d_k \quad \text{est nilpotent et } v_k \text{ nilpotent et} \quad v_k d_k = d_k v_k$$

  On définit :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} d & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \lambda_k \pi_k \\ v & u - d & \end{array} \right. \qquad \text{avec } \pi_k \text{ projecteur de } E \text{ sur } N_k \text{ car } E = \bigoplus_{k=1}^{p} N_k$$

  On a donc bien $u = v + d$ avec d diagonalisable (car $d = d_k$ sur N_k), v nilpotent ($v = v_k$ sur N_k) et $dv = vd$.

4 Références

- Analyse, *Gourdon*